EDOs lineares de coeficientes constantes via Álgebra Linear

Lucas Seco

26 de Dezembro de 2012

Sempre ouvi falar que a solução de EDOs lineares homogêneas de coeficientes constantes bem como o Método dos Coeficientes a Determinar pode ser feita como aplicação de ferramentas de Álgebra Linear. Porém nunca vi isso feito explicitamente e por isso escrevi essas notas. É interessante ver que todos os casos acabam sendo reduzidos ao caso

$$y^{(n)} = 0 \quad \text{ou} \quad y^{(n)} = \text{polinômio}$$

que tem solução geral polinomial.

Acho que algumas coisas daqui podem ser usadas como exercícios para um curso de Álgebra Linear. Correções, comentários e contribuições são bem-vindas.

1 Caso homogêneo via decomposição primária

Considere uma EDO linear homogênea de ordem n e coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

onde $y = y(x)$ é uma função complexa de uma variável, os coeficientes a_i são números complexos. Considere seu polinômio característico

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

Denote por D o operador linear de derivação que age no espaço vetorial das funções complexas infinitamente deriváveis de uma variável. Temos que

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots a_1 D + a_0 I$$

e que

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y$$

Assim, as soluções da EDO são dadas pelo subespaço vetorial

$$\ker p(D) = \{y :\, p(D)y = 0\}$$

Proposição 1 (Decomposição primária) *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, $D : V \to V$ linear, $p : \mathbb{C} \to C$ um polinômio de grau n com decomposição em fatores primos entre si*

$$p(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_s)^{m_s}$$

Então

$$\ker p(D) = \ker(D - r_1)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(D - r_s)^{m_s}$$

Essa é a chamada decomposição primária de $\ker p(D)$. *Observe que nessa formulação nenhum dos espaços V, $\ker p(D)$, $\ker(D - r_i)^{m_i}$ precisam ser de dimensão finita para que o resultado valha: o que se usa é apenas propriedades do anel de polinômio $\mathbb{C}[x]$.*

Segue que a solução geral da EDO

$$p(D)y = 0$$

é a soma direta das soluções gerais das EDOs

$$(D - r_i)^{m_i} y = 0$$

2 Solução geral de $(D - r)^m y = 0$

Quando $r = 0$, é imediato que a solução geral de

$$D^m y = 0$$

são precisamente os polinômios de grau $< m$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1}$$

que formam um espaço de dimensão m. Podemos reduzir o caso geral para esse caso da seguinte maneira.

Quando $m = 1$, é imediato que uma solução de

$$(D - r)y = y' - ry = 0$$

é a exponencial

$$y(x) = e^{rx}$$

Para o caso geral, precisamos saber como derivar m vezes funções da forma $e^{bx} f(x)$

Proposição 2 $D^m(e^{bx} f(x)) = e^{bx}(D + b)^m f(x)$

Prova: Pela regra do produto e pelo binômio de Newton temos que

$$\begin{aligned} D^m(e^{bx}f(x)) &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^k(e^{bx})D^{m-k}(f(x)) \\ &= e^{bx}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}b^kD^{m-k}(f(x)) \\ &= e^{bx}(D+b)^m f(x) \end{aligned}$$

onde usamos que $D^k(e^{bx}) = b^k e^{bx}$. ■

Podemos escrever esse resultado na linguagem de operadores da seguinte maneira. Denote por e^{bx} o operador linear que consiste em multiplicar uma função por e^{bx} e que tem inversa dada por multiplicação por e^{-bx}. Segue da Proposição anterior que

$$D^m \circ e^{bx} = e^{bx} \circ (D+b)^m$$

logo

$$(D+b)^m = e^{-bx} \circ D^m \circ e^{bx}$$

isto é, e^{-bx} conjuga D^m em $(D+b)^m$. Segue que e^{-bx} leva o núcleo de D^m no núcleo de $(D+b)^m$, isto é:

$$\ker(D+b)^m = e^{-bx}\ker D^m = \{e^{-bx}q(x) : q(x) \text{ polinômio de grau } < m\}$$

Trocando b por $-r$, isso mostra que as soluções de

$$(D-r)^m y = 0$$

são precisamente

$$e^{rx}q(x), \quad q(x) \text{ polinômio de grau } < m$$

que formam um espaço de dimensão m.

Da Seção anterior segue que a solução geral de

$$p(D)y = 0$$

são precisamente as somas

$$e^{r_1x}q_1(x) + \cdots + e^{r_sx}q_s(x)$$

onde r_i é raiz de $p(x)$ com multiplicidade m_i e $q_i(x)$ é polinômio de grau $< m_i$, que formam um espaço de dimensão = grau de $p(x)$ = ordem da EDO.

Observação 3 *A Proposição acima é consequência do seguinte fato mais geral. Seja $D : A \to A$ uma derivação de uma ágebra A e $a \in A$ é um autovetor de D com autovalor λ. Denote por a o operador linear de A que consiste em multiplicar por a e por $D \circ a$ a composição de D com a. Então*

$$D \circ a(b) = D(ab) = D(a)b + aD(b) = \lambda ab + aD(b) = a(D + \lambda)b$$

isto é

$$D \circ a = a \circ (D + \lambda)$$

Daí deduz-se facilmente que

$$D^n \circ a = a \circ (D + \lambda)^n$$

Se a tem inverso a^{-1} em A então

$$a^{-1} \circ D^n \circ a = (D + \lambda)^n$$

3 Caso não-homogêneo

É uma aplicação direta dos conceitos de Álgebra Linear que a solução geral do caso não-homogêneo é dado pela soma de uma solução particular do caso não-homogêneo com a solução geral do caso homogêneo. Vamos investigar soluções particulares quando o termo não-homogêneo é da forma exponencial vezes polinômio: esse é o chamado Método dos Coeficientes a Determinar.

O caso mais importante é quando o termo não homogêneo é um polinômio $q(x)$. Nesse caso podemos usar que D restrita aos polinômios é nilpotente, logo tem uma base natural na qual a EDO $p(D)y(x) = q(x)$ é um sistema triangular fácil de resolver.

Se a única raiz de $p(x)$ é 0 temos que

$$p(x) = x^m$$

logo a EDO fica

$$p(D)y(x) = D^m y(x) = q(x)$$

Integrando m vezes $q(x)$ e tomando todas as constantes de integração $= 0$ obtemos uma solução polinomial da forma $x^m Q(x)$ onde o polinômio $Q(x)$ tem o mesmo grau de $q(x)$. Podemos reduzir o caso geral para esse caso da seguinte maneira.

Proposição 4 *Se $q(x)$ é um polinômio então*

$$p(D)y(x) = q(x)$$

possui solução particular da forma

$$y(x) = x^m Q(x)$$

onde

$$\begin{aligned} m &= \textit{multiplicidade de } 0 \textit{ como raiz de } p(x) \\ Q(x) &= \textit{polinômio com o mesmo grau de } q(x) \end{aligned}$$

e os coeficientes de $Q(x)$ são unicamente determinados pelos coeficientes de $q(x)$ e $p(x)$.

Prova: Primeiro fazemos o caso em que 0 não é raiz de $p(x)$. Nesse caso obtemos uma solução polinomial $y(x)$ com o mesmo grau n de $q(x)$ resolvendo a EDO no espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$. Para isso observamos que D deixa invariante o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$ e que

$$1,\, x\,, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \frac{x^n}{n!},$$

é uma base desse espaço vetorial tal que $D(1) = 0$ e

$$D\frac{x^i}{i!} = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

para $i \geq 1$. Segue que nessa base a matriz de D tem 1 uma casa acima da diagonal principal e 0 nas outras entradas, a matriz de D^2 tem 1 duas casas acima da diagonal principal e 0 nas outras entradas, etc. Temos que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$$

onde $a_0 \neq 0$ uma vez que 0 não é raiz de $p(x)$. Além disso, podemos supor que $k \geq n$ tomando se necessário $a_k = 0$. Segue que

$$p(D) = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_k D^k$$

deixa invariante o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$ e sua matriz na base acima é triangular superior com a_0 na diagonal principal, a_1 uma casa acima da diagonal principal, a_2 duas casas acima da diagonal principal, etc. Nessa base a EDO

$$p(D)y(x) = q(x)$$

fica

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & & a_n \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_0 & a_1 \\ & & & & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

onde y_i e q_i são, respectivamente, as coordenadas de $y(x)$ e $q(x)$ nessa base. Uma vez que $a_0 \neq 0$, podemos resolver esse sistema escalonado de cima para baixo, onde $y_n = q_n/a_0 \neq 0$. Obtemos assim uma solução polinomial $y(x)$ da EDO com o mesmo grau de $q(x)$ cujos coeficientes são unicamente determinados pelos coeficientes de $q(x)$ e $p(x)$.

No caso geral, como m é a multiplicidade de 0 como raiz de $p(x)$, temos que

$$p(x) = p_0(x)x^m$$

onde 0 não é raiz do polinômio $p_0(x)$. Segue que a EDO fica

$$p(D)y(x) = p_0(D)D^m y(x) = q(x)$$

e fazendo

$$y_0(x) = D^m y(x)$$

ficamos com

$$p_0(D)y_0(x) = q(x)$$

Como 0 não é raiz de $p_0(x)$, pelo que vimos acima essa EDO possui solução $y_0(x) =$ polinômio do mesmo grau que $q(x)$. Determinamos $y(x)$ resolvendo

$$D^m y(x) = y_0(x)$$

que é o caso considerado antes do enunciado da Proposição e tem solução da forma $x^m Q(x)$, onde o polinômio $Q(x)$ tem o mesmo grau de $y_0(x)$ e seus coeficientes são determinados pelos coeficientes de $y_0(x)$. Como os coeficientes de $y_0(x)$ são determinados unicamente pelos coeficientes de $q(x)$ e $p_0(x)$, segue que os coeficientes de $Q(x)$ são determinados unicamente pelos coeficientes de $q(x)$ e $p(x)$. ■

Podemos reduzir o caso geral em que o termo não-homogêneo é da forma exponencial vezes polinômio para o caso anterior usando o seguinte resultado

$$(D+a)^m \circ e^{bx} = e^{bx} \circ (D + (a+b))^m$$

que segue da Proposição 2 usando o binômio de Newton ou da Observação 3, usando que e^{bx} é autovetor de $D+a$ com autovalor $a+b$.

Proposição 5 *Se $q(x)$ é um polinômio então*

$$p(D)y(x) = e^{ax}q(x)$$

possui solução particular da forma

$$y(x) = e^{ax}x^m Q(x)$$

onde

$$\begin{aligned} m &= \textit{multiplicidade de } 0 \textit{ como raiz de } p(x) \\ Q(x) &= \textit{polinômio com o mesmo grau de } q(x) \end{aligned}$$

e os coeficientes de $Q(x)$ são unicamente determinados pelos coeficientes de $q(x)$ e $p(x)$ e pelo expoente a.

Prova: Pelo visto acima temos que

$$\begin{aligned}
p(D) \circ e^{ax} &= (D - r_1)^{m_1} \circ \cdots \circ (D - r_s)^{m_s} \circ e^{ax} \\
&= e^{ax} \circ (D + (a - r_1))^{m_1} \circ \cdots \circ (D(a - r_s))^{m_s} \\
&= e^{ax} \circ ((D + a) - r_1)^{m_1} \circ \cdots \circ ((D + a) - r_s)^{m_s} \\
&= e^{ax} \circ p(D + a) \\
&= e^{ax} \circ p_a(D)
\end{aligned}$$

onde $p_a(x)$ é o polinômio $p(x+a)$. Assim, procurando uma solução da forma

$$y(x) = e^{ax} r(x)$$

para a EDO

$$p(D)y(x) = e^{ax}(q(x))$$

temos que

$$\begin{aligned}
p(D)y(x) &= p(D)e^{ax} r(x) \\
&= p(D) \circ e^{ax}(r(x)) \\
&= e^{ax} \circ p_a(D)r(x) = e^{ax}(q(x))
\end{aligned}$$

logo $r(x)$ é uma solução da EDO

$$p_a(D)r(x) = q(x)$$

Pela Proposição 4 essa última EDO possui uma solução polinomial da forma

$$r(x) = x^m Q(x)$$

onde m é a multiplicidade de 0 como raiz de $p_a(x) = p(x + a)$, logo é a multiplicidade de a como raiz de $p(x)$. Além disso, $Q(x)$ é um polinômio com o mesmo grau de $q(x)$ cujos coeficientes são unicamente determinados pelos coeficientes de $q(x)$ e $p_a(x)$, logo pelos coeficientes de $q(x)$ e $p(x)$ e pelo expoente a. ∎

4 Caso homogêneo sem decomposição primária

As Seções 2 e 3 são mais elementares que a Seção 1 pois seus resultados não fazem uso da decomposição primária. É possível obter a solução geral do caso homogêneo usando apenas as Seções 2 e 3 da seguinte maneira.

Vamos mostrar por indução no número de fatores primos de $p(x)$ que se

$$p(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_s)^{m_s}$$

então a solução geral da EDO homogênea

$$p(D)y(x) = 0$$

é dada pelas somas

$$y(x) = e^{r_1 x} q_1(x) + \cdots + e^{r_s x} q_s(x)$$

onde $q_i(x)$ é polinômio de grau $< m_i$, que formam um espaço de dimensão $=$ grau de $p(x) =$ ordem da EDO.

Pela Seção 2 toda $y(x)$ dessa forma é solução da EDO homogênea pois

$$\begin{aligned} p(D) \circ e^{r_i x} &= \cdots \circ (D - r_i)^{m_i} \circ e^{r_i x} \\ &= \cdots \circ e^{r_i x} \circ D^{m_i} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} p(D)(e^{r_i x} q_i(x)) &= p(D) \circ e^{r_i x}(q_i(x)) \\ &= \cdots \circ e^{r_i x} \circ D^{m_i}(q_i(x)) = 0 \end{aligned}$$

uma vez que grau $q_i(x) < m_i$.

Reciprocamente, seja $y(x)$ solução da EDO homogênea

$$p(D)y(x) = 0$$

Se $p(x)$ tem um só fator primo o resultado da Seção 2 nos dá que $y(x)$ é da forma que havíamos afirmado. Se $p(x)$ tem mais de um fator primo então considere a decomposição

$$p(x) = q(x)(x - r_1)^{m_1}$$

onde

$$q(x) = (x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_s)^{m_s}$$

tem menos fatores primos que $p(x)$. Segue que

$$p(D)y(x) = q(D)(D - r_1)^{m_1} y(x) = 0$$

então

$$y_0(x) = (D - r_1)^{m_1} y(x)$$

é solução da EDO homogênea

$$q(D)y_0(x) = 0$$

Pela hipótese de indução segue que

$$y_0(x) = e^{r_2 x} q_2(x) + \cdots + e^{r_s x} q_s(x)$$

onde r_i é raiz de $q(x)$ com multiplicidade m_i e $q_i(x)$ é polinômio de grau $< m_i$, para $i \geq 2$. Como

$$(D - r_1)^{m_1} y(x) = y_0(x)$$

segue que $y(x)$ é solução da EDO não-homogêna

$$(D - r_1)^{m_1} y(x) = e^{r_2 x} q_2(x) + \cdots + e^{r_s x} q_s(x)$$

Para $i \geq 2$, temos $r_i \neq r_1$ e pela Seção 3 segue que

$$(D - r_1)^{m_1} y_i(x) = e^{r_i x} q_i(x)$$

tem solução particular da forma

$$y_i(x) = e^{r_i x} Q_i(x)$$

onde $Q_i(x)$ é um polinômio de grau = grau $q_i(x) < m_i$. Somando essas soluções particulares segue que a EDO não-homogênea tem solução particular da forma

$$e^{r_2 x} Q_2(x) + \cdots + e^{r_s x} Q_s(x)$$

Pela Seção 2 temos que

$$(D - r_1)^{m_1} y(x) = 0$$

tem solução geral da forma

$$y(x) = e^{r_1 x} Q_1(x)$$

onde $Q_1(x)$ varia nos polinômios de grau $< m_1$. Segue que a EDO não-homogênea tem solução geral da forma

$$y(x) = e^{r_1 x} Q_1(x) + e^{r_2 x} Q_2(x) + \cdots + e^{r_s x} Q_s(x)$$

com grau $Q_i(x) < m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, s$. Isso que mostra que $y(x)$ é da forma que havíamos afirmado.

Observação 6 *De fato, da Seção 3 só precisamos do caso não-homogêneo mais simples*

$$(D - r)^m y(x) = e^{ax} q(x)$$

com $a \neq r$ e $q(x)$ polinômio.