Dinâmica Topológica e Aplicações à Teoria dos Números

Fernando Lucatelli Nunes

-

-

Sumário

Prefácio

Diante da carência de textos introdutórios à "dinâmica topológica" em português, este texto se propõe a dar uma introdução ao assunto em nível elementar.

O grande mérito da "Dinâmica topológica" é a quantidade de aplicações em diversas áreas da matemática. Então nada é mais natural do que motivar seu estudo mediante uma dessas possíveis aplicações. Por isso, neste texto, foram escolhidos como motivação alguns resultados em Teoria dos Números e Combinatória.

Essas aplicações foram escolhidas por dois motivos. Um deles é a natureza elementar dos resultados a serem demonstrados, tornando assim o livro mais acessível aos graduandos. O outro é que as noções necessárias para demonstrar tais resultados são razoáveis para se apresentar num primeiro contato com a teoria.

Os pré-requisitos do assunto tratado neste texto que não são comumente tratados num curso de graduação regular são trabalhados na referência [8].

A primeira versão deste texto foi escrita como parte do meu trabalho de Iniciação Científica pela UnB, intitulada "Introdução à Dinâmica Topológica e Aplicações à Teoria dos Números", no período de Agosto/2009 - Agosto/2010. Essa Iniciação Científica recebeu apoio do CNPq e foi orientada pelo professor Mauro Moraes Alves Patrão. Para mais detalhes sobre a iniciação, o relatório é a referência [9], disponibilizada na página do grupo de Teoria de Lie e Aplicações, cujo endereço é

http://teoriadelie.wordpress.com/

Resolvi colocar alguns merecidos agradecimentos aqui. Primeiramente, agradeço às pessoas que foram determinantes para completar esse trabalho: meus pais e minhas irmãs, pelo apoio, suporte, dedicação e incentivo durante todos momentos e decisões.

Agradeço ao professor Mauro Patrão pela paciência e pela dedicação na orientação durante o trabalho de Iniciação Científica. E aos professores que deram momentos de conversas que causaram motivação e idéias em matemática. Em especial, ao professor Salahoddin Shokranian pela disponibilidade para freqüência nessas conversas frutíferas.

Por fim, agradeço aos amigos e colegas que me incentivaram e ajudaram durante a realização desse trabalho.

Capítulo 0

Introdução

Nesse capítulo, o objetivo é familiarizar o leitor com o contexto onde a Dinâmica Topológica está inserida e, por fim, familiarizar o leitor com a disposição e os objetivos do texto.

0.1 Dinâmica Topológica

No sentido clássico, um sistema dinâmico é um sistema de equações diferenciais com condições suficientes impostas para assegurar continuidade e unicidade das soluções. Dessa forma, o sistema dinâmico define um fluxo no espaço. Desde Poincaré, muitos resultados de interesse de sistemas dinâmicos foram obtidos sem a hipótese de que esse fluxo tenha vindo de equações diferenciais. A extensão desses resultados de fluxos para grupos de transformações mais gerais marcou o começo do desenvolvimento da teoria conhecida como "Dinâmica Topológica".

Desde então, a Dinâmica Topológica tomou "vida" e importância próprias. Dentro dela surgiram novos problemas e questionamentos (alguns resolvidos e outros não). Ao tomar essa "vida própria", a Dinâmica Topológica ampliou cada vez mais a sua área de aplicabilidade. Ela acabou, então, se revelando uma ferramenta bastante útil e poderosa na investigação de problemas de várias áreas da Matemática e, conseqüêntemente, em áreas afins.

Dentre as aplicações mais conhecidas, estão as aplicações em Análise Funcional, em Equações Diferenciais, em Topologia, em Teoria dos Números (principalmente em Aproximação Diofantina) e em Combinatória (principalmente na Teoria de Ramsey).

0.2 Teoria dos Números

Nessa subseção, serão apresentados os resultados da Teoria dos Números e da Combinatória que serão tratados neste texto.

0.2.1 Aproximação diofantina

O problema de aproximar números reais usando números racionais é o principal ponto dos resultados diofantinos que, aqui, serão tratados. Esse assunto é chamado de "aproximação diofantina". Um dos exemplos mais simples foi provado por Kronecker (1823-1891), referência [7].

Esses resultados de teoria dos números tem aproximadamente 100 anos, mas as demonstrações dinâmicas usam técnicas de argumentação muito mais recentes, desenvolvidas por Hillel Furstenberg (1935-) , referências [3] e [4].

Lema 0.1 (Lema de Kronecker (1857)) *Para todo $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|n\alpha - m| < \varepsilon$.*

A densidade dos racionais na reta diz que, para todo α real e todo $\varepsilon > 0$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|n\alpha - m| < n\varepsilon$. O resultado de Kronecker é um pouco mais forte, pois diz que esses $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ podem ser escolhidos de tal forma que

$$|n\alpha - m| < \varepsilon.$$

Note que o lema de Kronecker implica na densidade dos racionais. Porém não há como demonstrar o lema de Kronecker partindo apenas da densidade dos racionais (ou seja, esses dois resultados não são equivalentes). Usando esse primeiro resultado em aproximação diofantina, será provado um outro teorema de Kronecker que generaliza o anterior.

Teorema 0.2 (Teorema de Kronecker (1857)) *Dados $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo $\varepsilon > 0$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $|n\alpha - \lambda - m| < \varepsilon$.*

Segue, abaixo, um teorema devido a Hardy (1877-1947) e a Littlewood (1885-1977). Esse teorema é, de certa forma, uma generalização do lema de Kronecker 0.1, pois diz que o natural multiplicando α pode ser escolhido sendo quadrado perfeito. Ou seja, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|n^2\alpha - m| < \varepsilon$. A demonstração original desse resultado está no contexto de teoria analítica dos números. No entanto, aqui, a demonstração será puramente dinâmica.

Teorema 0.3 (Hardy e Littlewood) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $|n^2\alpha - m| < \varepsilon$.*

Um último resultado de Aproximação Diofantina que será provado no livro é o teorema de Furstenberg. Ele implica, em particular, que poderíamos tomar o natural $n \in \mathbb{N}$ sendo um cubo perfeito, ou coisas ainda muito mais gerais.

Teorema 0.4 (Teorema de Furstenberg (1967)) *Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes reais tal que $p(0) = 0$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $|p(n) - m| < \varepsilon$.*

Um exemplo de aplicação do teorema de Furstenberg é tomar

$$p(x) = \pi x^{23} + e^{\pi} x^3.$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$, segue do teorema de Furstenberg que existem $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\left|\pi n^{23} + e^{\pi} n^3 - m\right| < \varepsilon.$$

Nota-se que o teorema de Furstenberg implica no teorema de Kronecker 0.1. Para mostrar isso, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, bastava tomar o polinômio $p(x) = \alpha x$. E, então, seguiria que, dado $\varepsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $|\alpha n - m| = |p(n) - m| < \varepsilon$. Além disso, o teorema de Furstenberg implica no Teorema de Hardy Littlewood: o argumento é análogo, tomando $p(x) = \alpha x^2$.

É possível, também, usar o resultado de Furstenberg para encontrar versões parecidas (generalizadas) do Teorema de Hardy-Littlewood. Como, por exemplo, seguiria imediatamente do Teorema de Fursteberg que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\left|n^k \alpha - m\right| < \varepsilon.$$

0.2.2 Teoria de Ramsey

O resultado combinatório aqui trabalhado é da área chamada **Teoria de Ramsey**. Essa teoria trabalha com a idéia de que um espaço com algum tipo de propriedade, quando dividido em um número finito de "partes", terá ao menos um de seus "pedaços" ainda possuindo esta propriedade. Esse espaço pode ser um grupo, um espaço vetorial ou até mesmo grafos. Evidente que nem todo par espaço-propriedade satisfaz essa condição de Ramsey. Então a Teoria de Ramsey estuda os tipos de espaço-propriedade que satisfazem essa conservação mediante partições finitas. Sob outra perspectiva, pode-se dizer que problemas da Teoria de Ramsey trabalham com a seguinte pergunta: "Dada uma estrutura com uma propriedade X, quantos elementos dessa estrutura são necessários para garantir a conservação da propriedade X?". Ou ainda, "o quão "grande" deve ser a estrutura original para que, ao ser particionado em r conjuntos, asseguremos que em ao menos um conjunto desse tipo de partição esteja mantida uma dada propriedade que nos seja interessante?".

Um exemplo de resultado elementar da Teoria de Ramsey é o conhecido "Princípio da Casa dos Pombos" que diz que se A é um conjunto com cardinalidade maior que n, então uma partição $\{X_i\}_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}}$ de A em n conjuntos é tal que, para ao menos um $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, a cardinalidade de X_i é maior que 1.

A bela conexão entre a dinâmica e a teoria de Ramsey foi desenvolvida por Furstenberg e a conexão entre a dinâmica topológica e a combinatória foi elaborada por Furstenberg e Weiss. A Dinâmica Topológica e a Teoria ergódica vêm sendo extensamente utilizada para demonstrar resultados em Teoria de Ramsey. Nesse livro, será demonstrado um dos resultados mais famosos dessa teoria, a saber o teorema de Van der Waerden, cujo enunciado preciso será apresentado a seguir.

Definição 0.1 *Seja X um conjunto. Uma partição finita de X é uma família de conjuntos $\{C_1, \ldots, C_n\}$ que satisfaz:*

- $C_i \cap C_j = \emptyset$, *se* $i \neq j$;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} C_i = X.$

Na terminologia da combinatória, uma partição finita é denominado por "uma coloração finita". E dois elementos que pertencem a um mesmo conjunto da partição são chamados monocromáticos.

Se o conjunto dos números naturais forem coloridos com duas cores (ou seja, se o conjunto dos naturais for particionado por dois conjuntos), o conjunto dos números colorido com uma das cores preserva muitos "padrões" dos naturais. Quando usamos um número finito de cores, isso também ocorre.

Uma P.A. finita de tamanho $r+1 \in \mathbb{N}$ é um conjunto do tipo

$$\{m, m+n, \ldots, m+rn\},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Segue o enunciado do Teorema de Van der Waerden, referência [11].

Teorema 0.5 (Van der Waerden (1927)) *Se $\mathbb{Z} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ é uma partição finita, dado $r \in \mathbb{N}$, então, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, C_j contém uma progressão aritmética de tamanho r. Ou seja, toda coloração finita de $\mathbb{Z}$ contém uma P.A. de tamanho arbitrário finito monocromática.*

Capítulo 1

Dinâmica Topológica

A dinâmica topológica estuda as propriedades topológicas dos sistemas dinâmicos. Em dinâmica topológica, um sistema dinâmico é um grupo topológico agindo (continuamente) num espaço topológico. Neste texto, todos sistemas dinâmicos têm espaço de fase compacto metrizável. Seguem as definições precisas.

Definição 1.1 (Sistema Dinâmico) *Sejam X um espaço metrizável compacto e $(G, *)$ um grupo topológico. Um* ***sistema dinâmico*** *é um par (X, ϕ), onde ϕ é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \phi: \quad G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Se $e \in G$ é o elemento neutro de G, $e \cdot x = x$, $\forall x \in X$;*

2. *Dados $g, h \in G$ quaisquer e $x \in X$ qualquer, $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$.*

O espaço X é denominado o espaço de fase do sistema dinâmico; o grupo G é denominado o grupo de fase; e ϕ a projeção de fase.

Um sistema dinâmico também pode ser denotado pela tripla (X, G, ϕ) ou pelo par (X, G).

Convém observar que, dado um sistema dinâmico (X, G), tem-se que, para todo $g \in G$, a aplicação $\mathfrak{g} : X \to X$, onde $\mathfrak{g}(x) = g \cdot x$, é um homeomorfismo.

Normalmente, em dinâmica topológica, os sistemas dinâmicos têm um dos dois grupos de fase: $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Quando o grupo de fase é $\mathbb{R}$, o sistema dinâmico é denominado contínuo e ele está associado a uma equação diferencial ordinária. Quando o grupo de fase é $\mathbb{Z}$, o sistema dinâmico é denominado discreto.

Nesse livro, sistemas dinâmicos discretos serão amplamente tratados. Portanto convém fazer algumas observações mais precisas a esse respeito. Dado um sistema dinâmico $(X, \mathbb{Z})$, existe um único homeomorfismo $T : X \to X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \cdot x = T^n x$ (onde $T^n x$ é a n-ésima iterada de T em x). Note que, para isso, basta tomar $T : X \to X$ tal que $Tx = 1 \cdot x$. Temos que T é um homemorfismo e é fácil notar que $n \cdot x = T^n x$. Reciprocamente, dado um homeomorfismo $T : X \to X$, onde X é compacto metrizável, é fácil definir um sistema dinâmico discreto $(X, \mathbb{Z})$ fazendo $n \cdot x = T^n x$.

Logo, diante das observações, para sistemas dinâmicos discretos, adota-se, também, a notação (X, T), onde X é o espaço de fase e $T : X \to X$ é o homeomorfismo tal que $n \cdot x = T^n x$ (para todo $n \in \mathbb{Z}$).

1.1 Linguagem Básica

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de sistemas dinâmicos, para que possamos, motivados pelos exemplos, introduzir certas noções importantes da Dinâmica Topológica, como pontos periódicos ou fixos. A noção de órbita nos dá base para desenvolver o resto da linguagem básica dos sistemas dinâmicos.

Definição 1.2 (Órbita de um ponto) *Seja (X, G, ϕ) um sistema dinâmico. Dado um ponto $x \in X$, o conjunto*

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

*é chamado de **órbita do ponto** x.*

Exemplo 1.2.1 *Seja $S^1 = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. Tem-se que S^1 é compacto metrizável. Define-se o homeomorfismo $R_{1/2} : S^1 \to S^1$, onde $R_{1/2}x = e^{\pi i}x$. E, então, temos o sistema dinâmico $(S^1, R_{1/2})$. Tem-se que a órbita de 1 é $\mathbb{Z} \cdot 1 = \{1, e^{\pi i}\}$.*

Esse sistema dinâmico é ilustrado na figura 1.1.

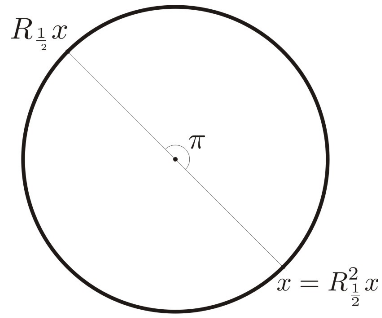

Figura 1.1: Sistema de rotação por π radianos.

O tipo mais simples de órbita é a órbita de um ponto fixo. Segue a definição de ponto fixo.

Definição 1.3 (Ponto fixo) *$x \in X$ é um ponto fixo do sistema dinâmico (X, G), quando sua órbita é um conjunto unitário. Ou seja, $x \in X$ é um ponto fixo, quando $G \cdot x = \{x\}$.*

Exemplo 1.3.1 *Seja $S^1 = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. Fixando $j \in S^1$, pode-se, de maneira geral, definir o homeomorfismo $T_j : S^1 \to S^1$, $T_j(x) = jx$. Segue que (S^1, T_j) possui ponto fixo se, e somente se, $j = 1$. E, sendo $j = 1$, T_1 é identidade e, portanto, todo ponto de (S^1, T_1) é fixo.*

Definição 1.4 (Órbita de um conjunto) *Sejam (X, G) um sistema dinâmico e $U \subset X$. A órbita de U é o conjunto*

$$G \cdot U = \{t \cdot x : t \in G \text{ e } x \in U\} = \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

Exemplo 1.4.1 *Seja $S^1 = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$. Dado $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, define-se $R_\alpha : S^1 \to S^1$, $R_\alpha x = e^{2\pi\alpha} x$. E, então, temos o sistema dinâmico (S^1, R_α), que é denominado rotação irracional do círculo. Nesse tipo de sistema dinâmico, dado um aberto $U \subset S^1$ qualquer, veremos que $\mathbb{Z} \cdot U = S^1$.*

Definição 1.5 (Ponto periódico) *Seja (X, G) um sistema dinâmico. $x \in X$ é um ponto periódico desse sistema dinâmico, se, para algum $g \in G$ diferente do elemento neutro, $g \cdot x = x$.*

Exemplo 1.5.1 *Evidente que todo ponto fixo é ponto periódico. Além disso, no exemplo 1.2.1, todo ponto é periódico em* $(S^1, R_{1/2})$.

Fixado $\alpha \in \mathbb{Q}$, *define-se* $R_\alpha : S^1 \to S^1$, *onde* $R_\alpha(z) = e^{2\pi\alpha}z$*: esse sistema dinâmico é chamado de rotação racional do círculo. Veremos, neste texto, que todo ponto de* (S^1, R_α) *é periódico.*

A figura 1.2 abaixo ilustra o sistema para $\alpha = 1/4$.

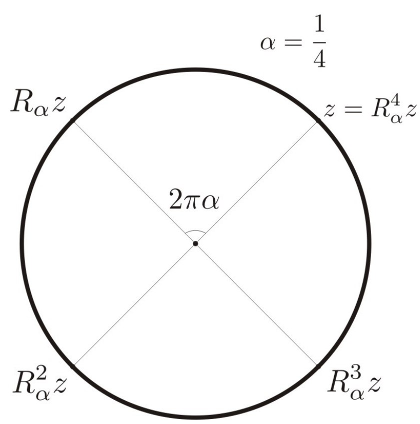

Figura 1.2: Rotação racional do círculo.

Em um sistema dinâmico qualquer, evidente que, se a órbita de um ponto é finita, então esse ponto é periódico. Num sistema dinâmico discreto, a recíproca é verdadeira. Segue o enunciado desse lema (e sua demonstração).

Lema 1.1 *Seja* $(X, \mathbb{Z})$ *um sistema dinâmico. Dado* $x \in X$, $\mathbb{Z} \cdot x$ *é finita se, e somente se,* x *é periódico. No caso em que* x *é periódico, denomina-se a cardinalidade de* $\mathbb{Z} \cdot x$ *de "periodo de* x*".*

Prova: Com efeito, seja $(X, \mathbb{Z})$ um sistema dinâmico. Se $x \in X$ é periódico, segue que existe $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $n \cdot x = x$. Tem-se, então, que $-n$ é tal que $-n \cdot x = x$, afinal, $-n \cdot x = -n \cdot (n \cdot x) = (-n + n) \cdot x = 0 \cdot x = x$. Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que $n > 0$.

Provemos que, dado $m \in \mathbb{Z}$, $m \cdot x = m(mod\ n) \cdot x$. Com efeito, dado $l = m(mod\ n)$, segue que $m - l = kn$ (para algum $k \in \mathbb{Z}$). Logo $(m - l) \cdot x = (kn) \cdot x = x$ e, portanto, $l \cdot x = l \cdot ((m - l) \cdot x) = m \cdot x$. Isso completa a prova de que $m \cdot x = m(mod\ n) \cdot x$.

Provou-se, então, que a cardinalidade de $\mathbb{Z} \cdot x$ é menor ou igual a n. $\square$

1.2 Homomorfismos

Um ponto importante no estudo de Sistemas Dinâmicos é a construção de novos sistemas dinâmicos partindo de outros. Um dos meios mais elementares de construir um sistema dinâmico é o sistema dinâmico produto.

Definição 1.6 (Sistema dinâmico produto) *Sejam (X, G) e (Y, G) sistemas dinâmicos. Define-se o sistema dinâmico produto como sendo $(X \times Y, G)$, onde $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$. Note que, de fato, isso é um sistema dinâmico, afinal, como X, Y são compacto metrizáveis, segue que $X \times Y$ é compacto metrizável. Além disso, é evidente que a ação é contínua e continua satisfazendo as condições de ação.*

Exemplo 1.6.1 *Seja $S^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$. Definem-se $Id : S^1 \to S^1$, onde $Id(x) = x$, e $R_\pi : S^1 \to S^1$, onde $R_\pi x = e^{2\pi^2} x$. Então temos os dois sistemas dinâmicos (S^1, Id) e (S^1, R_π). Tem-se que $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$ é o toro. Com os resultados que serão apresentados neste texto, será fácil notar que o sistema dinâmico produto $(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ de (S^1, Id) e (S^1, R_π), ilustrado na figura 1.3, é tal que nenhum ponto é periódico nem fixo.*

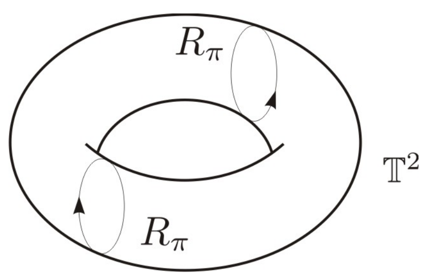

Figura 1.3: Sistema dinâmico produto.

Ao tratarmos aqui de um sistema dinâmico (X, G), estamos particularmente interessados nas propriedades topológicas de (X, T). Após definir homomorfismos entre sistemas dinâmicos, teremos o significado preciso do que são essas propriedades.

Definição 1.7 (Homomorfismo de sistemas dinâmicos) *Um homomorfismo entre dois sistemas dinâmicos* (X, G) *e* (Y, G) *é uma aplicação contínua* $\phi : X \to Y$ *tal que, para todo* $g \in G$ *e todo* $x \in X$,

$$g \cdot \phi(x) = \phi(g \cdot x).$$

Quando $\phi : X \to Y$ *é sobrejetivo, diz-se que* ϕ *é uma semi-conjugação topológica. E, quando o* $\phi : X \to Y$ *é um homeomorfismo, diz-se que os sistemas dinâmicos* (X, G) *e* (Y, H) *são isomorfos. E, nesse caso, eles são indistinguíveis em nosso estudo.*

É fácil notar que isomorfismo entre sistemas dinâmicos é uma relação de equivalência.

Exemplo 1.7.1 *Sejam* (X, G) *e* (Y, G) *dois sistemas dinâmicos. Toma-se o sistema dinâmico produto* $(X \times Y, G)$. *Segue que a projeção* $\phi_1 : X \times Y \to X$, $\phi_1(x, y) = x$, *é um semi-conjugação entre* $(X \times Y, G)$ *e* (X, G). *De forma análoga, a projeção* $\phi_2 : X \times Y \to Y$ *é uma semi-conjugação entre* $(X \times Y, G)$ *e* (Y, G).

Dessa forma, dados os sistemas dinâmicos do exemplo 1.6.1, segue que a projeção do toro no círculo $\phi : \mathbb{T}^2 \to S^1$ *tanto é uma semi-conjugação entre* $(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ *e* (S^1, R_π), *como ilustrado na figura 1.4, quanto é uma semi-conjugação entre* $(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ *e* (S^1, Id).

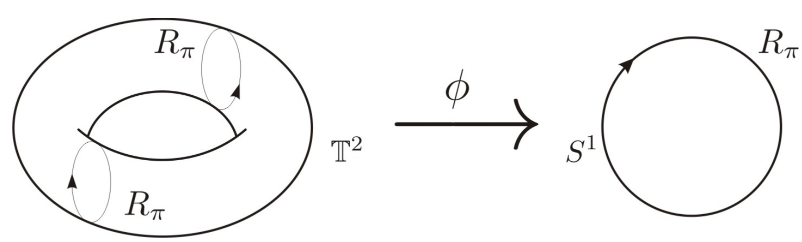

Figura 1.4: Semi-conjugação projeção.

A propriedade mais simples que é preservada por isomorfismos entre sistemas dinâmicos é a de e existência de pontos fixos e pontos periódicos.

Proposição 1.2 *Sejam (X, G) e (Y, G) sistemas dinâmicos. Se $\pi : X \to Y$ é um homomorfismo entre os sistemas dinâmicos, segue que, se $x \in X$ é periódico em (X, G), então $\pi(x) \in Y$ é periódico em (Y, G). Se $y \in X$ é fixo, segue que $\pi(y)$ é fixo em (Y, G)*

Prova: Com efeito, se $x \in X$ é periódico, segue que existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = x$. Segue, então, que $g \cdot \pi(x) = \pi(g \cdot x) = \pi(x)$, ou seja, $\pi(x)$ é periódico. Para provar a segunda afirmação, seja $y \in X$ fixo. Dado $h \in G$, tem-se que $h \cdot \pi(y) = \pi(h \cdot y) = \pi(y)$. Logo $\pi(y)$ é fixo em (Y, G). □

As propriedades que são preservadas por isomorfismos são denominadas "propriedades topológicas" dos sistemas dinâmicos.

Definição 1.8 *Um sistema dinâmico discreto (Y, S) é um fator do sistema dinâmico discreto (X, T), se existe uma semi-conjugação $\phi : X \to Y$. A aplicação ϕ é chamada* ***aplicação fator****. Nesse caso, (X, T) é uma* ***extensão*** *de (Y, S).*

A imagem inversa de cada ponto por uma aplicação fator é chamada de fibra e o conjunto $\{\phi^{-1}(y) : y \in Y\}$ é chamado de conjunto das fibras.

Sejam (X, T) e (Y, S) sistemas dinâmicos discretos. A condição para que $\phi : X \to Y$ seja um homomorfismo entre os sistemas dinâmicos é apresentado na proposição seguinte.

Proposição 1.3 *Sejam (X, T) e (Y, S) sistemas dinâmicos discretos. Se $\phi : X \to Y$ é uma aplicação contínua tal que*

$$\phi(Tx) = S(\phi(x)),$$

então ϕ um homomorfismo entre (X, T) e (Y, S)

Prova: Com efeito, para provar a proposição basta provar que, para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{Z}$, $S^n(\phi(x)) = \phi(T^n x)$. Dado $x \in X$, provemos que $S^n(\phi(x)) = \phi(T^n x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, a afirmação coincide com a hipótese. Supõe-se por indução que a afirmação seja verdadeira para um m. Segue que $S^{m+1}(\phi(x)) = S(S^m(\phi(x))) = S(\phi(T^m x)) = \phi(T(T^m x)) = \phi(T^{m+1} x)$. Isso completa a prova por indução de que $S^n(\phi(x)) = \phi(T^n x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para completar a prova, basta provar por indução que

$$S^{-n}(\phi(x)) = \phi(T^{-n}x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que, fazendo $x = Ty$, $\phi(T(y)) = S(\phi(y))$. Portanto, como $y = T^{-1}(x)$, segue que

$$S^{-1}(\phi(x)) = \phi(y) = \phi(T^{-1}(x)).$$

Logo a afirmação é verdadeira para $n = 1$. O resto de demonstração por indução é análogo à indução anterior. $\square$

1.3 Minimalidade

Definição 1.9 *Seja (X, G) um sistema dinâmico. Um subconjunto Y de X é denominado G-**invariante**, se $G \cdot Y = Y$.*

No caso de um sistema dinâmico discreto (X, T), podemos falar que $Y \subset X$ é $\mathbb{Z}$-invariante ao satisfazer $T(Y) = TY \subset Y$ e $T^{-1}(Y) \subset Y$. Neste caso, usa-se a terminologia T-invariante.

Exemplo 1.9.1 *Seja (X, G) um sistema dinâmico. Para todo $x \in X$, a órbita de x é um subconjunto G-invariante. Com efeito, basta ver que, evidentemente, dados $y \in G \cdot x$ e $h \in G$, tem-se que $y = g \cdot x$ para algum $g \in G$. E, portanto, $h \cdot y = h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x \in G \cdot x$.*

De forma análoga, conclui-se que, se (X, G) é um sistema dinâmico, a órbita de qualquer subconjunto $V \subset X$ é G-invariante.

Alguns resultados básicos sobre subconjuntos invariantes serão provados antes de definirmos um dos principais conceitos envolvendo subconjuntos invariantes: o de subconjunto minimal.

O fecho de um subconjunto invariante num sistema dinâmico é, ainda, invariante. Disso segue que o fecho da órbita de um conjunto (ou de um ponto) é invariante. Esses resultados serão formalizados e provados abaixo.

Lema 1.4 *Seja (X, G) um sistema dinâmico. Se $Y \subset X$ é G-invariante, segue que $\overline{Y}$ é G-invariante.*

Em particular, para todo $x \in X$, $\overline{G \cdot x}$ é G-invariante. E, para todo $Y \subset X$, $\overline{G \cdot Y}$ é G-invariante.

Prova: Com efeito, se Y é G-invariante, tem-se que, dado $g \in G$, $g \cdot Y \subset Y$, donde segue que $\overline{(g \cdot Y)} \subset \overline{Y}$. E, portanto, pela continuidade da ação,

$$g \cdot \overline{Y} \subset \overline{(g \cdot Y)} \subset \overline{Y}.$$

Ficou provado, então, que $\overline{Y}$ é G-invariante.

Em particular, dados $x \in X$ e $Y \subset X$, tem-se que $G \cdot x$ e $G \cdot Y$ são G-invariantes. Logo $\overline{G \cdot x}$ e $\overline{G \cdot Y}$ são G-invariantes. $\square$

Se um subconjunto é invariante num sistema dinâmico, o mesmo ocorrerá com o seu complementar. Isso é um resultado bem fácil de se deduzir que será usado muitas vezes em demonstrações pelo texto, portanto será enunciado e provado abaixo.

Lema 1.5 *Sejam (X, G) um sistema dinâmico e $Y \subset X$ um subconjunto G-invariante. Segue que $X - Y = Y^C$ é G-invariante.*

Prova: Com efeito, prova-se por contraposição. Se $Y^C = X - Y$ não é G-invariante, segue que existem $g \in G$ e $y \in Y^C$ tais que $g \cdot y \in Y$. Logo segue que Y não é G-invariante, pois existe $g \cdot y \in Y$ tal que

$$g^{-1} \cdot (g \cdot y) = e \cdot y = y \notin Y.$$

$\square$

Definição 1.10 (Subconjunto minimal) *Seja (X, G) um sistema dinâmico. $M \subset X$ é* ***minimal*** *se é um subconjunto não-vazio, G-invariante, fechado e que não contenha partes próprias não-vazias fechadas que sejam G-invariantes. Ou seja, $M \subset X$ é minimal, se*

1. *M é fechado e G-invariante;*

2. *$F \subset M$, $F \neq \emptyset$, F fechado e G-invariante $\Longrightarrow F = M$.*

Por sua vez, um sistema dinâmico (X, T) é denominado minimal se X é minimal desse sistema dinâmico.

Exemplo 1.10.1 *Define-se* $R_\pi : S^1 \to S^1$, $R_\pi x = e^{2\pi^2}x$. *Veremos, neste texto, que* (S^1, R_π) *é minimal. Mais geralmente, se* $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, *define-se* $R_\alpha x = e^{2\pi\alpha}x$. *E, então,* (S^1, R_α) *é minimal.*

É fácil verificar que a propriedade de minimalidade é um invariante por isomorfismos em sistemas dinâmicos.

Note que um sistema dinâmico é minimal se, e somente se, a órbita de todo ponto é densa no espaço de fase. Apesar de isso ser uma conseqüência direta da definição, será enunciado como um lema para futuras referências.

Lema 1.6 *Um sistema dinâmico* (X, G) *é minimal se, e somente se, todo ponto de* X *tem órbita densa em* X.

Prova: De fato, seja (X, G) um sistema dinâmico minimal. Se o fecho da órbita de um ponto x de X fosse uma parte própria de X , então X não seria minimal, pois, pelo lema 1.4, o fecho da órbita de x é G-invariante (e, no caso, obviamente, não-vazio e fechado). Logo o fecho da órbita de qualquer ponto é necessariamente X.

Reciprocamente, se X não é minimal, segue que existe uma parte própria F de X fechada T-invariante não-vazia. Dado $x \in F$, tem-se que $G \cdot x \subset F$ e, então, $\overline{G \cdot x} \subset F \neq X$. Isso completa a prova de recíproca. □

Definição 1.11 (Subsistema) *Seja* (X, G) *um sistema dinâmico (espaço de fase metrizável compacto). Se* $Y \subset X$ *é fechado e* G*-invariante,* (Y, G) *é chamado de subsistema do sistema dinâmico* (X, G).

Note que, nesse caso, de fato, (Y, G) *é um sistema dinâmico. Afinal, é evidente que a ação mantém suas propriedades. Além disso,* Y *é fechado do compacto metrizável* X *e, portanto, é compacto metrizável.*

Em particular, se $M \subset X$ *é minimal do sistema dinâmico* (X, G)*, pode-se tomar o subsistema* (M, G).

Um importante teorema de caracterização de sistemas dinâmicos minimais segue abaixo.

Teorema 1.7 *Seja* (X, G) *um sistema dinâmico. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *(X,G) é um sistema dinâmico minimal;*

2. *Os únicos fechados $Y \subset X$ T-invariantes são $\emptyset$ e X;*

3. *Para todo conjunto não-vazio aberto $U \subset X$, $G \cdot U = X$;*

4. *Pata todo aberto não-vazio $U \subset X$, existem $g_1, \ldots, g_k \in G$ tais que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} g_i \cdot U = X$.*

Prova: (1)$\Longrightarrow$(2) é óbvia. Para provar que (2)$\Longrightarrow$(3), dado $U \subset X$ aberto e não vazio, segue que, por $G \cdot U$ ser um aberto, o seu complementar F é um fechado. Tem-se que $G \cdot U$ é G-invariante, logo F é G-invariante. Pela hipótese, por F ser fechado G-invariante, segue que F ou é igual a X, ou é vazio. Como $X - F = F^C = G \cdot U$ é necessariamente não vazio (pois ao menos $\emptyset \neq U \subset G \cdot U$), segue que $F = \emptyset$, ou seja, $G \cdot U = X$.

Para provar que (3)$\Longrightarrow$(4), basta ver que, dado $U \subset X$ aberto não-vazio, $G \cdot U = \displaystyle\bigcup_{g \in G} g \cdot U = X$ é uma cobertura aberta de X e, portanto, pela compacidade de X, existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $g_1, \ldots, g_k \in G$ tais que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} g_i \cdot U = X$.

Para provar que (4)$\Longrightarrow$(1), faremos prova por contraposição. Ou seja, provaremos que negação de (1) implica na negação de (4). Seja (X,G) não minimal, segue que existe um fechado não-vazio $F \subset X$ G-invariante tal que $F \neq X$. Toma-se $U = X - F$ que, pela hipótese, é não-vazio. Tem-se, então, que U é G-invariante. Logo

$$\bigcup_{g \in G} g \cdot U = U \neq X.$$

Em particular, isso quer dizer que não existe um subconjunto finito $\mathfrak{g} \subset G$ tal que $\displaystyle\bigcup_{g \in \mathfrak{g}} g \cdot U = X$. □

Teorema 1.8 *Todo sistema dinâmico (X,G) possui um subconjunto minimal $M \subset X$.*

Prova: Seja (X, G) um sistema dinâmico. Coloquemos a ordem parcial da inclusão na família $\mathfrak{F}$ dos subconjuntos fechados não-vazios G-invariantes de X. Essa família é não vazia, pois ao menos $X \in \mathfrak{F}$. Note que um subconjunto fechado de um compacto é compacto e, portanto, todo elemento de $\mathfrak{F}$ é compacto.

Dada uma cadeia K qualquer de $\mathfrak{F}$, a interseção dos elementos de uma subfamília finita qualquer

$$\{B_1, \ldots, B_n\} \subset K$$

é igual ao menor conjunto e, portanto, é não vazia. Logo, por K ser uma família de fechados de X que satisfaz a propriedade de interseção finita, a interseção $\bigcap_{F \in K} F$ é não vazia. Note que essa interseção é uma cota inferior da cadeia K. Ou seja, foi provado que conseguimos uma cota inferior para toda cadeia de $\mathfrak{F}$ e, portanto, pelo lema de Zorn, temos que $\mathfrak{F}$ tem um elemento minimal M.

Note que o fechado M é G-invariante e é não vazio, pois $M \in F$. Se $M_0 \subset M$ é fechado, não-vazio e G-invariante, segue que $M_0 \in F$ e $M_0 \subset M$, ou seja, $M_0 = M$. Isso completa a prova de que $M \subset X$ é um conjunto minimal de (X, G) e, portanto, completa a demonstração do teorema. $\square$

Capítulo 2

Recorrências

Esse capítulo será dedicado a um dos conceitos mais básicos da dinâmica topológica: o de recorrência (de Poincare). Esse conceito é intimamente ligado à noção de minimalidade. Um dos resultados mais fundamentais desse capítulo é o teorema de Birkhoff (resultado 2.3.1). Esse resultado será provado logo depois de apresentado o conceito de conjunto ω-limite.

Seguem a definição de ponto recorrente e um lema importante sobre imagem de pontos recorrentes por homomorfismos.

Definição 2.1 *Seja (X, T) um sistema dinâmico discreto. Um ponto $x \in X$ diz-se recorrente se existe uma seqüência de números inteiros (n_j) tal que $n_j \to \infty$ e tal que $n_j \cdot x \to x$.*

Lema 2.1 *Sejam (X, T) e (Y, S) sistemas dinâmicos discretos. Se $\pi : X \to Y$ é um homomorfismo e $x \in X$ é recorrente, segue que $\pi(x) \in Y$ é recorrente.*

Prova: Com efeito, dada uma vizinhança $U \subset Y$ de $\pi(x)$, segue que $\pi^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x. Por x ser recorrente, $C_{\pi^{-1}(U)} = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in \pi^{-1}(U)\}$ é infinito.

Dado $m \in C_{\pi^{-1}(U)}$, segue que $S^m(\pi(x)) = \pi(T^m x) \in U$. Isso provou que

$$C_U = \{n \in \mathbb{N} : S^n(\pi(x)) \in U\} \subset C_{\pi^{-1}(U)}.$$

E, portanto, C_U é infinito. Logo completou-se a prova de que $\pi(x)$ é recorrente em (Y, S). $\square$

2.1 Conjuntos Limites

Num sistema dinâmico discreto minimal, provaremos que todos os pontos são recorrentes. Note que provamos a existência de um subconjunto minimal num sistema dinâmico, logo segue que todo sistema dinâmico discreto possui pontos recorrentes (basta tomar um ponto do subconjunto minimal).

Antes de provar esses resultados, seguiremos definindo mais uma importante noção em Dinâmica Topológica. Essa noção é a de conjuntos limites. Seja (X, T) um sistema dinâmico discreto, dado $x \in X$, dizer que y pertence ao conjunto ω-limite de x significa, intuitivamente, que as iterações de x estarão "freqüentemente" perto de y. As noções de conjuntos limites como serão definidas aqui são restritas a sistemas dinâmicos discretos. Portanto, nesta seção, todos os sitemas dinâmicos serão discretos.

Definição 2.2 (Conjunto ω - limite) *Seja (X, T) um sistema dinâmico discreto. Dado $x \in X$, um ponto $y \in X$ é $\omega-$**limite** de x, se existir uma seqüência $n_k \to \infty$ tal que $n_k \cdot x \to y$. Em particular, se y é $\omega-$limite , tem-se que $y \in \overline{(\mathbb{Z}^+ \cdot x)}$. O **conjunto** $\omega-$**limite** de x, denotado por $\omega(x)$, é o conjunto de todos pontos $\omega-$limites. Note que*

$$\omega(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{t \cdot x : t > n\}}.$$

Nesses termos, dizer que $x \in X$ é um ponto recorrente é equivalente a dizer que $x \in \omega(x)$. Ou seja, se (X, T) é um sistema dinâmico discreto, $x \in X$ é recorrente se, e somente se, x pertence ao seu próprio conjunto $\omega-$limite.

Lema 2.2 *Seja (X, T) um sistema dinâmico discreto. O conjunto $\omega-$limite de qualquer ponto x de X é não-vazio, fechado, compacto e T-invariante.*

Prova: Com efeito, como X é um espaço métrico compacto, segue que toda seqüência de pontos em X possui uma subseqüência convergente, logo, de fato, o conjunto $\omega-$limite de qualquer ponto $x \in X$ é não-vazio, pois a seqüência $(n \cdot x)$ possui uma subseqüência convergente. Como o conjunto $\omega-$limite é uma interseção de fechados, segue que é, também, fechado. Como ele é um fechado de um compacto, segue que o conjunto $\omega-$limite é compacto.

Dado $y \in \omega(x)$, segue que existe uma seqüência (n_k) de números naturais tal que $n_k \to +\infty$ e $n_k \cdot x \to y$. Se $m \in \mathbb{Z}$, segue que $(n_k + m)$ é um seqüência de números inteiros tal que $n_k + m \to +\infty$ e $(n_k + m) \cdot x \to m \cdot y$ (pois T é contínua). Logo $m \cdot y \in \omega(x)$. Se tirarmos os termos negativos da seqüência $(n_k - m)$, conseguimos uma seqüência (m_k) de números naturais tal que $m_k \to +\infty$ e $m_k \cdot x \to (-m) \cdot y$. Portanto $(-m) \cdot y \in \omega(x)$ e, então, $\omega(x)$ é T-invariante. □

Veremos que, com o resultado 2.2, segue diretamente que todos os pontos de um sistema dinâmico minimal discreto são recorrentes.

Proposição 2.3 *Seja (X, T) um sistema dinâmico discreto minimal. Tem-se que todo ponto $x \in X$ é recorrente.*

Prova: Com efeito, seja (X, T) é um sistema dinâmico discreto minimal. Dado $x \in X$, segue que $\omega(x)$ é um subconjunto fechado não-vazio e T-invariante. Mas, como (X, T) é minimal, segue que $\omega(x) = X$. E, portanto, em particular, $x \in \omega(x)$, donde segue que x é recorrente. □

Evidente que a recíproca da proposição 2.3 não é verdadeira: por exemplo, é muito fácil construir sistemas dinâmicos não minimais tais que todos seus pontos são todos periódicos (em particular, recorrentes).[1]

Segue o teorema de Birkhoff que fala da existência de pontos recorrentes em todo sistema dinâmico discreto.

Corolário 2.3.1 (Teorema de Birkhoff) *Todo sistema dinâmico discreto (X, T) possui um ponto recorrente.*

Prova: Dado um sistema dinâmico (X, T), segue pelo teorema 1.8 que existe $M \subset X$ minimal. Evidente que M é compacto (pois é fechado de um compacto), logo podemos considerar o subsistema (M, T). Pela proposição 2.3, (M, T) é tal que todo $x \in M$ é recorrente. Evidente que $x \in M$ é recorrente no sistema (X, T). □

2.2 Translações em Grupos

O sistema de translação em grupos compactos metrizáveis é um sistema dinâmico com propriedades bem interessantes, principalmente em relação a

[1] Um exemplo já apresentado em 1.5.1 é a rotação racional do círculo.

recorrências. Por essas propriedades, esses sistemas dinâmicos se tornaram muito importantes na teoria. Além de ser um sistema dinâmico muito importante e comum, esse tipo de sistema dinâmico será usado na demonstração de um dos teoremas sobre Aproximação Diofantina. Segue a definição de sistema de translação.

Definição 2.3 (Sitema de Translação) *Seja $(G, \cdot)$ um grupo compacto metrizável, fixa-se $r \in G$. Define-se, então, $T : G \to G$, $T(x) = r \cdot x$. A aplicação T é evidentemente um homeomorfismo (por G ser um grupo topológico). T é chamada de* ***translação*** *e o sistema (G, T) é chamado de* ***sistema dinâmico da translação por*** *r, ou sistema de translação r.*

Exemplo 2.3.1 *Temos que S^1 é um grupo metrizável compacto. Define-se $R_\alpha : S^1 \to S^1$, $R_\pi x = e^{2\pi\alpha}x$. Segue que (S^1, R_α) é um sistema de translação por $u = e^{2\pi\alpha}$.*

A proposição abaixo ilustra uma das interessantes propriedades que um sistemas de translação tem.

Proposição 2.4 *Seja (G, T) um sistema dinâmico de translação. As órbitas dos pontos de G são todas homeomorfas entre si.*

Prova: Seja (G, T) um sistema dinâmico de translação por $a \in G$. Com efeito, dados $g \in G$, define-se $f : \mathbb{Z} \cdot a \to \mathbb{Z} \cdot g$, $f(a^n) = a^n g = n \cdot g$. É evidente que f é contínua e é uma bijeção. Tem-se que $f^{-1} : \mathbb{Z} \cdot g \to \mathbb{Z} \cdot a$, $f^{-1}(a^n g) = (a^n g)g^{-1} = a^n$ é contínua. Logo f é um homeomorfismo. Isso completou a prova da proposição. $\square$

Essa proposição implica, por exemplo, que, se algum ponto num sistema dinâmico de translação tem órbita finita, então todos os pontos desse sistema dinâmico possuem órbitas finitas. Ou seja, segue o seguinte lema.

Lema 2.5 *Seja (G, T) um sistema de translação por $a \in G$. Todo ponto de um sistema de translação é periódico se, e somente se, algum ponto de G é periódico.*

Além dessas importantes propriedades, tem-se a seguinte propriedade.

Lema 2.6 *Seja (G, T) um sistema dinâmico de translação por $a \in G$. Segue que (G, T) é minimal se, e somente se, existe um ponto de G com órbita densa.*

Prova: Note que é evidente que a minimalidade implica que a órbita de qualquer ponto de G é densa em G (segue do lema 1.6).

Reciprocamente, seja $g \in G$ um ponto com órbita densa. Dado $h \in G$, provemos que a órbita de h é densa. Dado $r \in G$ tem-se que existe uma seqüência de números inteiros não necessariamente distintos (n_k) tal que $n_k \cdot g \to rh^{-1}g$. Pela continuidade do produto, segue que $n_k \cdot h \to r$. Isso provou que a órbita de h é densa e, portanto, completa a prova de que todo ponto de G tem órbita densa. Pelo lema 1.6, segue que (G, T) é minimal. □

E, por fim, todo sistema dinâmico de translação é recorrente: no sentido de que todos seus pontos são recorrentes. Esse resultado será muito importante: será usado no principal resultado sobre produtos cruzados e, também, numa demonstração sobre aproximação diofantina.

Proposição 2.7 *Seja (G, T) um sistema de translação por $a \in G$. Todos pontos de G são recorrentes.*

Prova: Pelo teorema de Birkhoff, existe um ponto $z \in G$ recorrente em (G, T). Segue que existe $n_j \to \infty$ tal que $a^{n_j} z \to z$. Dado $g \in G$, pela continuidade do produto no grupo topológico, segue que $a^{n_j} g = a^{n_j} z z^{-1} g \to g$. Ou seja, g é recorrente. □

A proposição anterior poderia ter sido demonstrada sem usar o teorema de Birkhoff. Dados $a \in G$ e $u \in G$, toma-se a seqüência (a^n). Temos, pela compacidade de G, que existem $n_j \to \infty$ e $v \in G$ tais que $a^{n_j} \to v$. Mas, sem perda de generalidade, podemos supor que $m_j = n_{j+1} - n_j \to \infty$. Portanto, pela continuidade do produto e da inversão, tem-se que

$$a^{m_j} u = a^{n_{j+1}} (a^{n_j})^{-1} u \to v v^{-1} u = u.$$

Isso provou, então, que, num sistema de rotação por a (qualquer), todo ponto é recorrente.

2.3 Produtos Cruzados

Nesta seção, os sistemas dinâmicos são todos discretos. Já sabemos que a imagem de um ponto fixo, periódico ou recorrente por uma semiconjugação entre sistemas dinâmicos discretos tem a propriedade preservada. Mas nada pode ser dito da imagem inversa. No entanto, mediante certas condições, esse quadro é mudado (e, então, conseguiremos mais informações usando a semi-conjugação entre dois sistemas dinâmicos discretos). A maior parte dessa seção dedica-se a esse mérito.

Definição 2.4 *Sejam (Y, S) um sistema dinâmico discreto, G um grupo compacto metrizável e $\phi : Y \to G$ uma aplicação contínua. Define-se o par (X, T), onde $X = Y \times G$ e $T(y, g) = (Sy, \phi(y)g)$. Esse par é chamado de produto cruzado de (Y, S) via o grupo G pela aplicação ϕ. (X, T) também é chamado de produto cruzado de (Y, S) e G.*

Se (Y, S) é um sistema dinâmico discreto, então o produto cruzado (X, T) de (Y, S) via o grupo G por uma aplicação ϕ é um sistema dinâmico discreto. Além disso, (X, T) é uma extensão de (Y, S). A proposição abaixo estabelece essas afirmações.

Proposição 2.8 *Sejam (Y, S) um sistema dinâmico discreto, G um grupo compacto metrizável e (X, T) um produto cruzado de (Y, S) via G. Tem-se que (X, T) é um sistema dinâmico e é uma extensão de (Y, S), onde*

$$\begin{aligned} \pi : X &\to Y \\ (y, g) &\mapsto y \end{aligned}$$

é a semi-conjugação entre (X, T) e (Y, S).

Prova: De fato, X é produto cartesiano de dois espaços métricos compactos e, portanto, é um espaço métrico compacto. A transformação T é contínua em cada uma de suas coordenadas e, portanto, é contínua. A aplicação inversa é definida por

$$T^{-1}(x, h) = (S^{-1}x, (\phi(S^{-1}x))^{-1}h)$$

e é evidentemente contínua (logo, de fato, T é um homeomorfismo).

Resta verificar que, de fato, (X,T) é uma extensão. Ora, basta, então, verificar que $\pi : X \to Y$, onde $\pi(y,g) = y$ é uma semi-conjugação. Isso é, obviamente, uma aplicação sobrejetiva contínua (é, na verdade, a projeção). Basta, então, verificar que $\pi(T(y,g)) = S(\pi(y,g))$. Dado $(y,g) \in X$, $\pi(T(y,g)) = Sy$. Também ocorre que $S(\pi(y,g)) = Sy$. Logo essa condição é satisfeita, ou seja, provamos que, de fato, π é uma semi-conjugação. $\square$

Definição 2.5 *Sejam (Y,S) um sistema dinâmico discreto, G um grupo compacto metrizável e (X,T) um produto cruzado de (Y,S) via G. Uma translação à direita do produto cruzado (X,T) por $h \in G$ é uma aplicação $R_h : X \to X$ tal que $R_h(y,g) = (y,gh)$.*

Proposição 2.9 *Sejam (Y,S) um sistema dinâmico discreto, G um grupo compacto metrizável e (X,T) um produto cruzado de (Y,S) via G. Então, para todo $h \in G$, a translação R_h é uma conjugação[2] de (X,T) nele mesmo.*

Prova: R_h é obviamente um homeomorfismo. Resta apenas provar que T e R_h comutam. Dado $x = (y,g) \in X$, tem-se que

$$\begin{aligned} R_h(Tx) &= R_h(Sy, \phi(y)g) \\ &= (Sy, \phi(y)gh) \\ &= T(y,gh) \\ &= TR_h(y,g) \\ &= TR_h(x) \end{aligned}$$

$\square$

O principal mérito desta seção é construir uma condição suficiente para que o sistema dinâmico discreto fator (Y,S) traga informações sobre os pontos de recorrência de sua extensão (X,T). No caso, essa condição suficiente é (X,T) ser um produto cruzado de (Y,S) via um grupo compacto metrizável G. Isso é amplamente utilizado em dinâmica topológica. Em particular, tudo feito nesta seção será importante nas demonstrações dos teoremas sobre aproximação diofantina. Segue um resultado que torna isso mais claro.

[2]Ou seja, isomorfismo de sistemas dinâmicos.

Teorema 2.10 *Sejam (Y,S) um sistema dinâmico discreto, G um grupo compacto metrizável e (X,T) um produto cruzado de (Y,S) via G. $y \in Y$ é recorrente se, e somente se, (y,g) é recorrente em X para todo $g \in G$ (ou seja, todos pontos de sua fibra são recorrentes).*

Prova: Como (X,T) é uma extensão de (Y,S), segue do lema 2.1 que, se $x \in X$ recorrente, então $\pi(x)$ é recorrente.

Reciprocamente, seja $e \in G$ o elemento neutro de G. Primeiramente, prova-se que *$y \in Y$ recorrente implica $(y,e) \in X$ recorrente.* Como $y \in Y$ é recorrente, segue que existe $n_j \to \infty$ tal que $S^{n_j}y \to y$. Como X é compacto, pode-se supor, sem perda de generalida (passando a uma subseqüência se necessário), que $(T^{n_j}(y,e))$ converge. Tem-se que $T^{n_j}(y,e) \to (y,h)$ para algum $h \in G$. Ou seja, $(y,h) \in \omega(y,e)$.

Prova-se que $R_h(\omega(y,e)) \subset \omega(y,e)$. Dado $(z,a) \in \omega(y,e)$, segue que existe $m_j \to \infty$ tal que $T^{m_j}(y,e) \to (z,a)$. Logo

$$\begin{aligned} T^{m_j}(y,h) &= T^{m_j}R_h(y,e) \\ &= R_h(T^{m_j}(y,e)) \\ &\to R_h(z,a). \end{aligned}$$

Como $\omega(y,e)$ é T-invariante, $T^{m_j}(y,h) \in \omega(y,e)$ para todo os índices m_j. E, por $\omega(y,e)$ ser fechado, segue que $R_h(z,a) \in \omega(y,e)$.

Logo, em particular, segue que $R_h^m(y,h) = (y,h^{m+1}) \in \omega(y,e)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pelo resultado 2.7, segue que existe $s_j \to \infty$ tal que $(y,h^{s_j}) \to (y,e)$ e, como $\omega(y,e)$ é fechado, isso prova que $(y,e) \in \omega(y,e)$, ou seja, (y,e) é recorrente.

Por (y,e) ser recorrente, existe $k_j \to \infty$ tal que $T^{k_j}(y,e) \to (y,e)$. Dado $g \in G$, segue, pela continuidade de R_g, que

$$T^{k_j}(y,g) = R_g(T^{k_j}(y,e)) \to R_g(y,e) = (y,g),$$

ou seja, foi provado que (y,g) é recorrente. □

2.4 Recorrência Múltipla

Nesta seção, recorreremos às definições e aos resultados sobre sistemas dinâmicos mais gerais. O principal objetivo dessa seção é provar o teorema 2.13

.

Definição 2.6 *Dados dois sistemas dinâmicos (X, G) e (X, H), diz-se que (X, G) e (X, H) comutam entre si, se para todo $g \in G$, todo $h \in H$ e todo $x \in X$, $g \cdot (h \cdot x) = h \cdot (g \cdot x)$.*

Definição 2.7 *Um sistema dinâmico discreto (X, T) é chamado de sistema dinâmico homogêneo, se existe um sistema dinâmico (X, G) que comuta com (X, T) tal que (X, G) é minimal.*

Um subconjunto $A \subset X$ fechado é homogêneo com respeito a (X, T), se existe um sistema dinâmico (X, H) que comuta com (X, T) tal que $A \subset X$ é minimal nesse sistema dinâmico.

Lema 2.11 *Sejam (X, T) um sistema dinâmico discreto e $A \subset X$ um subconjunto fechado homogêneo. Suponha que para todo $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in A$, $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^n x, y) < \varepsilon$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existem $z \in A$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^m z, z) < \varepsilon$.*

Um conjunto $A \subset X$ satisfazendo a hipótese é denominado conjunto homogêneo recorrente.

Prova: Supõe-se que (X, T) é um sistema dinâmico e $A \subset X$ é um subconjunto fechado homogêneo satisfazendo a hipótese. Primeiramente, provaremos que "para todo $\varepsilon > 0$ e todo $u \in A$, existem $w \in X$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^m u, w) < \varepsilon$".

Dado $\varepsilon > 0$, seja (X, G) um sistema dinâmico que comuta com (X, T) tal que $A \subset X$ é minimal em (X, G). Como A é fechado, segue que é compacto e, portanto, é totalmente limitado. Disso segue que existe uma cobertura de A por bolas abertas $A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ de raios menores que $\varepsilon/4$. Por (A, G) ser minimal, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe um conjunto finito $F_i \subset G$ tal que

$$\bigcup_{g \in F_i} g^{-1} \cdot B_i = A.$$

Denota-se $F := \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Evidente que F é finito, então denotam-se $F = \{g_1, \ldots, g_N\}$ e $I_N := \{1, \ldots, N\}$. Dados $u, v \in A$, tem-se que $u \in B_k$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$ e, também, que $v \in g_j^{-1} \cdot B_k$ para algum $j \in I_N$. Logo $(g_j \cdot v) \in B_k$ e, então, $d(g_j \cdot u, v) < \varepsilon/2$.

Portanto $\text{mín}_{i \in I_N} d(g_i \cdot u, v) < \varepsilon/2$ para quaisquer $u, v \in A$.

Por outro lado, pela continuidade uniforme da ação, tem-se que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $i \in I_N$, $d(g_i \cdot x, g_i \cdot y) < \varepsilon/2$, se $d(x, y) < \delta$. Pela hipótese, existem $x, y \in A$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^m x, y) < \delta$. Portanto, para todo $i \in I_N$,

$$d(g_i \cdot (T^m x), g_i \cdot y) = d(T^m (g_i \cdot x), g_i \cdot y) < \varepsilon/2.$$

Temos, então, que, para todo $u \in A$,

$$\begin{aligned} \text{mín}_{i \in I_N} d(T^m(g_i \cdot x), u) &\leq \text{mín}_{i \in I_N} (d(T^m(g_i \cdot x), g_i \cdot y) + d(g_i \cdot y, u)) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ e cada $u \in A$, existem $m \in \mathbb{N}$ e $w := (g_j \cdot x) \in A$ tais que $d(T^m w, u) < \varepsilon$.

Logo a afirmação está provada.

Provemos a afimação do Lema.

Dado $\varepsilon > 0$, definem-se duas seqüências (z_n) em A e (m_n) em $\mathbb{N}$ indutivamente. Fixa-se $z_0 \in A$. Pelo que foi provado, tem-se que existem $z_1 \in A$ e $m_1 \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^{m_1} z_1, z_0) < \varepsilon/2$.

Supõe-se, por indução, que foram tomados $z_0, \ldots, z_l$ e $n_1, \ldots, n_l$ tais que, para todo $i < j \leq l$, $d(T^{n_{i+1} + \cdots + n_j} z_j, z_i) < \varepsilon/2$.

Pela continuidade de T, existe $\delta < \varepsilon/2$ tal que, se $d(z, z_l) < \delta$, para todo $i < l$, $d(T^{n_{i+1} + \cdots + n_l} z, z_i) < \varepsilon/2$.

Por outro lado, segue da afirmação provada anteriormente, que existem $z_{l+1} \in A$ e $n_{l+1} \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^{n_{l+1}} z_{l+1}, z_l) < \delta < \varepsilon/2$. Portanto

$$d(T^{n_{i+1} + \cdots + n_{l+1}} z_{l+1}, z_i) < \varepsilon/2$$

para todo $i < l$. E, assim, ficam definidas as seqüências indutivamente.

Pela compacidade de X, segue que existe uma subseqüência de (z_n). Logo, em particular, segue que existem z_i, z_j na seqüência tais que $d(z_i, z_j) < \varepsilon/2$. Disso segue que

$$\begin{aligned} d(T^{n_{i+1}+\cdots+n_{j+1}}z_j, z_j) &\leq d(T^{n_{i+1}+\cdots+n_{j+1}}z_j, z_i) + d(z_i, z_j) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Provaremos, na proposição seguinte, que se (X, T) é um sistema dinâmico discreto e $A \subset X$ é um subconjunto homogêneo recorrente, então existe $y \in A$ recorrente em (X, T). Isso é um resultado forte sobre recorrência que será importante na demonstração do teorema de recorrência múltipla.

Proposição 2.12 *Sejam (X, T) um sistema dinâmico discreto e $A \subset X$ um subconjunto fechado homogêneo de X. Se para todo $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in A$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $d(T^n x, y) < \varepsilon$; então existem $z \in A$ e uma seqüência de inteiros $n_j \to \infty$ tal que $T^{n_j} z \to z$. Ou seja, existe um ponto recorrente $z \in A$.*

Prova: Seja (X, G) o sistema dinâmico que comuta com (X, T) e que torna $A \subset X$ minimal. Define-se a função

$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto inf_{n\in\mathbb{N}} d(T^n x, x). \end{aligned}$$

Nota-se que um ponto x é recorrente se, e somente se, $f(x) = 0$. Pelo lema anterior, temos que $inf_{x\in A} f(x) = 0$. Temos que f é semicontínua superiormente. Afinal, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$y \in \{x \in A : inf_{n\in\mathbb{N}} d(T^n x, x) < \alpha\},$$

tem-se que $inf_{n\in\mathbb{N}} d(T^n y, y) = \beta < \alpha$. Logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(T^m y, y) < \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Pela continuidade de T^m, segue que existe $\delta > 0$ tal que $T^m(B(y;\delta)) \subset B(T^m y, \frac{\alpha-\beta}{2})$. Ou seja, $w \in B(y;\delta)$ implica

$$\begin{aligned} d(T^m w, w) \leq d(T^m y, T^m w) + d(T^m y, y) &< \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Logo, em particular, $w \in \{x \in M : inf_{n\in\mathbb{N}} d(T^n x, x) < \alpha\}$. Isso provou que $\{x \in A : inf_{n\in\mathbb{N}} d(T^n x, x) < \alpha\}$ é aberto (em A).

Pela semicontinuidade superior de f, segue que existe um ponto $z \in A$ em que f é contínua.

Supõe-se por absurdo que $f(z) > 0$. Disso segue que existem $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança aberta $U \subset A$ de z tais que $f(x) > \varepsilon$ para todo $x \in U$. Tem-se pela minimalidade de A em (X, G) que existem $g_1, \ldots, g_k \in G$ tais que

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} g_i^{-1} \cdot U.$$

Pela continuidade da ação de G, tem-se que existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $d(g_i \cdot x, g_i \cdot x) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Tem-se que $f(y) < \delta$ para algum $y \in A$, pois $inf_{x\in A} f(x) = 0$. portanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^m y, y) < \delta$. Toma-se $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $y \in g_j^{-1} U$ e, então, tem-se que

$$f(g_j y) \leq d(T^m g_j y, g_j y) = d(g_j T^m y, g_j y) < \varepsilon.$$

Absurdo, pois $g_j \cdot y \in U$. Logo deve-se ter que $f(z) = 0$. $\square$

O teorema abaixo é um forte resultado de recorrência (múltipla) devido a Furstenberg e Weiss. Com ele, provaremos, futuramente, uma "versão dinâmica" do teorema de Van der Waerden (que será tirado como conseqüência).

Teorema 2.13 (Furstenberg e Weiss) *Seja $F = \{T_1, \ldots, T_k\}$ uma família de homeomorfismos comutativos agindo num espaço métrico compacto X. Segue que existem $x \in X$ e uma seqüência $n_j \to \infty$ tais que*

$$T_i^{n_j} x \to x, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

Prova: Com efeito, prova-se por indução sobre k. Para $k = 1$, a afirmação é o teorema 2.3.1. Supõe-se, por indução, que a afirmação seja verdadeira para um k. Sejam $F = \{T_1, \ldots, T_{k+1}\}$ uma família de homeomorfismos comutativos agindo num espaço métrico compacto X. Seja (X, G) o sistema dinâmico gerado por esses homeomorfismos. Ou seja, $(X, G) = (X, \mathbb{Z}^{k+1})$ tal que $(n_1, \ldots, n_k) \cdot x = T^{n_1} \cdots T^{n_k} x$. Toma-se um subconjunto minimal (fechado) de (X, G) $Y \subset X$. Como Y é minimal em (X, G), em partiular, é G-invariante. E, apartir de agora, considera-se o sistema dinâmico (Y, G). Segue que $Y \subset X$ é T_i-invariante (para todo $i \in \{1, \ldots, k+1\}$). Além disso, (Y, G) comuta com (Y, T_i) para todo $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.

Sejam $Y^{k+1} = Y \times \cdots \times Y$ e $\Delta \subset Y^{k+1}$ a diagonal de Y^{k+1}. Tem-se que (Y^{k+1}, G), onde $g \cdot (x_1, \ldots, x_{k+1}) = (g \cdot x_1, \ldots, g \cdot x_{k+1})$, é tal que $\Delta \subset Y^{k+1}$ é um subconjunto minimal. Pode-se, então, definir $T : Y^{k+1} \to Y^{k+1}$, onde $T(x_1, \ldots, x_{k+1}) = (T_1 x_1, \ldots, T_{k+1} x_{k+1})$. Segue que $\Delta \subset Y^{k+1}$ é um subconjunto homogêneo fechado do sistema dinâmico (Y^{k+1}, T) (pois (Y^{k+1}, T) comuta com (Y^{k+1}, G)).

Prova-se que $\Delta \subset Y^{k+1}$ é um subconjunto fechado homogêneo de (Y^{k+1}, T) que satisfaz a hipótese da proposição 2.12. Define-se $S_j = T_j T_{k+1}^{-1}$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$. Segue que

$$\{S_1, \ldots, S_k\}$$

é uma família de homeomorfismos comutativos agindo no espaço métrico compacto Y. Pela hipótese de indução, segue que existem $n_j \to \infty$ e $z \in X$ tais que

$$S_i^{n_j} z \to z, \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(S_i z, z) < \varepsilon, \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Disso segue que, tomando $y = (T_{k+1}^{-m_0} z, \ldots, T_{k+1}^{-m_0} z) \in X$,tem-se que

$$d(T^{m_0} y, z_\Delta) = d\left((S_1 z, \ldots, S_k z, z), (z, \ldots, z)\right) < \varepsilon.$$

Isso completou a prova de que Δ satisfaz a hipótese da proposição 2.12 e, portanto, existe um ponto recorrente $(w, \ldots, w) \in \Delta$ de (Y^{k+1}, T). Disso segue que existe $n_j \to \infty$ tal que

$$T^{n_j}(w, \ldots, w) \to (w, \ldots, w).$$

Mas isso implica justamente que

$$T_i^{n_j} w \to w, \forall i \in \{1, \ldots, k+1\}.$$

E isso completa a prova por indução. $\square$

Capítulo 3

Teoria do Números

Este capítulo utilizará os conceitos e resultados provados até agora para demonstrar alguns resultados de teoria dos números. A maioria dos resultados que serão demonstrados neste capítulo são antigos, mas suas demonstrações usando apenas dinâmica topológica são bem mais novas.

Atualmente, muitos pesquisadores usam sistemas dinâmicos (teoria ergódica) para encarar problemas atuais de combinatória e aproximação diofantina. No entanto, as técnicas/resultados utilizados para isso estão fora do escopo do texto. Este capítulo pretende apenas ilustrar o início dessa bonita aplicação de Dinâmica Topológica à Teoria dos Números, com demonstrações dinâmicas de teoremas famosos.

3.1 Sistemas de Kronecker

Esta seção será dedicada aos resultados de aproximação diofantina. Os sistemas dinâmicos estudados nesta seção são, em sua maioria, com espaços de fase sendo grupos compactos metrizáveis. Serão, portanto, bastante utilizados resultados sobre grupos topológicos. A referência [8] apresenta todos esses resultados sobre gupos topológicos que não estiverem explícitos no texto.

Definição 3.1 (Sistema de Kronecker) *Seja* $(\mathbb{R}, +)$ *o grupo aditivo. Como* $\mathbb{R}$ *é um grupo abeliano, todo subgrupo é normal. Em particular,* $\mathbb{Z}$ *é um subgrupo normal, logo podemos considerar o grupo quociente* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*. Por* $\mathbb{Z}$ *ser fechado em* $\mathbb{R}$ *e por* $\mathbb{R}$ *ser um grupo metrizável, localmente compacto e* *separável, o grupo quociente* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, *com a topologia quociente, é um grupo metrizável*[1]. *Fora isso, veremos mais adiante que* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *é, de fato, compacto e metrizável (como conseqüências da proposição 3.1).*

Os grupos $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *são grupos topológicos isomorfos (por isso, colocamos a igualdade* $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$*). Esse fato é conseqüência de um teorema sobre grupos topológicos: ver [8]. Portanto podemos indicar* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *por* $\mathbb{T}$ *e, então,* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ *é denotado por* $\mathbb{T}^n$. *Um elemento* $x+\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *será denotado por* $\overline{x} = x + \mathbb{Z}$. *Note que,* $\overline{x} = \overline{y}$ *significa que existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x = k + y$.

Um sistema de Kronecker é um sistema dinâmico de translação com espaço de fase $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Proposição 3.1 *Sejam* $S = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ *com a operação de multiplicação usual dos complexos e a métrica euclidiana* d_E *e* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Tem-se que S é um subgrupo de um grupo topológico (metrizável), logo é topológico (metrizável). Define-se o seguinte epimorfismo:

$$\varphi : \mathbb{R} \to S, \varphi(x) = e^{2\pi xi} = cos(2\pi x) + i \cdot sen(2\pi x).$$

Nota-se que o Kernel desse epimorfismo é o conjunto $\mathbb{Z}$ *dos inteiros (pois* $e^{2k\pi i} = 1$ *se, e somente se,* $k \in \mathbb{Z}$*).*

Então, pelo primeiro teorema de isomorfismo, o homomorfismo

$$\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S, f(\overline{x}) = cos(2\pi x) + i \cdot sen(2\pi x) = e^{2\pi xi}.$$

é um isomorfismo. Temos que ϕ, *além de ser um isomorfismo de grupos, é um isomorfismo de grupos topológicos.*

Prova: Precisa-se provar que ϕ é, de fato, um isomorfismo de grupos topológicos. Note que φ é um homomorfismo de grupos, pois é evidente que, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} e^{(2\pi(x+y)k)i} &= e^{(2\pi(x+y))i} \\ &= e^{(2\pi x)i} \cdot e^{(2\pi y)i}. \end{aligned}$$

É fácil ver que φ é sobrejetiva. Basta ver que $z = 2\pi \cdot x$ "passa" por todo o intervalo $[0, 2\pi)$ e, portanto, passa por todos os valores possíveis da função $cos(z) + i \cdot sen(z)$.

[1]Essa passagem é explicada na referência [8].

Logo, temos que ϕ, como foi definida, é, de fato, um isomorfismo de grupos (isso é conseqüência do denominado "Primeiro teorema do isomorfismo").

Por φ ser uma aplicação contínua e aberta, existe um "primeiro teorema de isomorfismo" para grupos topológicos que garante que ϕ é um isomorfismo de grupos topológicos. Mas não assumiremos isso aqui (o "primeiro teorema de isomorfismo" é apresentado na referência [8]).

Resta provar que ϕ é, de fato, um homeomorfismo. Seja $P : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/\mathbb{N})$ tal que $P(x) = \overline{x}$. Tem-se que ϕ é contínua se, e somente se, $(\phi \circ P)$ o é.[2] Note que essa função $(\phi \circ P)$ é evidentemente contínua. Na verdade, se $t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t(x) = 2\pi x i$ (linear, portanto contínua), segue que $(\phi \circ P) = E \circ t$ (onde E é a função exponecial nos complexos). Logo ϕ é contínua. De forma análoga, nota-se que $\phi^{-1} = P \circ T \circ L$, onde $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x/2\pi i$ é linear, L é o logaritmo nos complexos. Como todas as três funções são contíinuas, a prova de que ϕ^{-1} é contínua está completa.

Portanto ϕ é, de fato, um homeomorfismo. □

A proposição acima mostra que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e S são indistinguíveis no ponto de vista de grupos topológicos. Esse fato faz com que possamos confundir os dois grupos sem causar prejuízo ao rigor. Tem-se, por exemplo, que S é compacto (pois é homeomorfo à circunferência de raio 1 em $\mathbb{R}^2$), logo também é compacto $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Temos, então, que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é o produto de espaços compactos e, portanto, é compacto. Outra propriedade "herdada" para $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o fato de ser metrizável (métrico). Com efeito, podemos induzir uma métrica pelo isomorfismo de grupos topológicos (como será feito na definição abaixo). E, então, $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ também é métrico (com uma das métricas do produto (finito)).

Definição 3.2 *Induzimos em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma métrica por ϕ. Ou seja, definimos a métrica em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como sendo: $d(x, y) := d_E(\phi(x), \phi(y))$. Nota-se que, por S ser metrizável, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é metrizável também (como já havíamos previsto).*

A métrica induzida é equivalente a uma métrica denominada a "métrica do menor arco":

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = min\left\{|x - y - m| : m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

[2]Procurar por "topologia quociente" no [8].

Note que, se $x, y \in \mathbb{R}$, a distância $d(\overline{x}, \overline{y}) = \varepsilon$ significa, em particular, que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|x - y - m| = \varepsilon$.

Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$, é fácil de verificar que $d(\overline{x}, \overline{y})$ é igual ao comprimento do menor arco determinado por $\overline{x}$ e $\overline{y}$ em S^1 dividido por 2π. Ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$, a distância $d(\overline{x}, \overline{y})$ é igual ao comprimento do arco ilustrado na figura 3.1 abaixo.

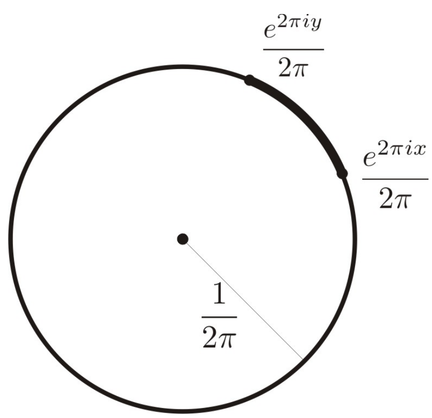

Figura 3.1: Métrica do menor arco.

Quando não estiver explícito o contrário, a métrica em $\mathbb{T}$ será a a métrica do menor arco. Fora isso, a métrica em $\mathbb{T}^n$ será a métrica do máximo em relação à métrica do menor arco, ou seja, a métrica:

$$d_M(x, y) = max\left\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\right\}.$$

3.1.1 Teorema de Kronecker

Esta subseção será dedicada à demonstração do teorema de Kronecker sobre apoximação diofantina (teorema 0.2). Consegue-se um resultado um pouco mais fraco que o teorema 0.2 apenas com o resultado 2.7. Ele é chamado de "lema de Kronecker" . Esse lema é conseqüência direta do fato de que todos os pontos num sistema dinâmico de translação são recorrentes. Com esse lema, conseguimos toda a ferramenta necessária para demonstrar o teorema 0.2

Lema 3.2 (Lema de Kronecker) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $|n\alpha - m| < \varepsilon$.*

Prova: Com efeito, toma-se o sistema dinâmico de Kronecker $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T)$, onde $T\overline{x} = \overline{x} + \overline{\alpha}$. Pelo teorema 2.7, todo ponto desse sistema dinâmico é recorrente. Em particular, o ponto $0 \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ é recorrente. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, com a métrica d do menor arco, $d(n\overline{\alpha}, 0) < \varepsilon$. Isso quer dizer que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|n\alpha - m| < \varepsilon$. $\square$

Definição 3.3 (Rotação irracional do círculo) *Um sistema dinâmico de Kronecker, com espaço de fase $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, que é uma translação por r, onde r é irracional, é chamado de rotação irracional do círculo. (E, quando r é racional, esse sistema é chamado de rotação racional).*

Antes de demonstrar o teorema de Kronecker, convém fazer uma observação sobre rotações irracionais. Se $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T)$ é um sistema dinâmico de rotação irracional do círculo, segue que não existem pontos periódicos nesse sistema dinâmico. A demonstração desse fato é simples. Supondo por absurdo que $\overline{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um ponto periódico, segue que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot \overline{x} = \overline{x}$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x - k + n\alpha$. Disso segue que $n\alpha = k$ e, portanto, $\alpha = \dfrac{k}{n}$. Absurdo, pois contraria a hipótese de α ser irracional. Na verdade, veremos que toda rotação irracional é um sistema dinâmico minimal.

Além disso, é fácil ver que todos os pontos de rotações racionais são periódicos. Afinal, um sistema de rotação por $\overline{p/q}$ (p e q inteiros) é tal que $q \cdot \overline{x} = \overline{x}$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. E, então, fica fácil ver que toda rotação racional é um exemplo de sistema dinâmico de translação não minimal.

Segue o enunciado e a demonstração do teorema de Kronecker 0.2.

Teorema 3.3 (Kronecker) *Dados $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo $\varepsilon > 0$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $|n\alpha - \lambda - m| < \varepsilon$.*

Prova: Com efeito, dados $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, toma-se o sistema dinâmico de Kronecker $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T)$, onde $T\overline{x} = \overline{x} + \overline{\alpha}$. Pelo teorema 2.7, todo ponto desse sistema dinâmico é recorrente. Em particular, o ponto $\overline{0} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é recorrente. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, com a métrica d do menor arco, $d(n\overline{\alpha}, \overline{0}) < \varepsilon$. E, como $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\overline{0} \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ não é periódico, tem-se que $0 < d(n\overline{\alpha}, \overline{0}) < \varepsilon$. Isso quer dizer que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < |n\alpha - m| < \varepsilon$. Se $\lambda > 0$, pela propriedade arquimedianda da reta, existe $k = \text{mín}\{q \in \mathbb{N} : q\,|n\alpha - m| \geq \lambda\}$. Portanto $k\,|n\alpha - m| - \lambda < \varepsilon$, pois, caso contrário, $(k-1)\,|n\alpha - m| > k\,|n\alpha - m| - \varepsilon \geq \lambda$. Dependendo do sinal de $n\alpha - m$, segue que $0 \leq kn\alpha - km - \lambda < \varepsilon$ ou $0 \leq -kn\alpha + km - \lambda < \varepsilon$.

Caso $\lambda < 0$, toma-se $k = \text{mín}\{-q \in \mathbb{N} : q\,|n\alpha - m| \leq \lambda\}$ e a demonstração fica análoga. $\square$

É fácil de perceber que o teorema de Kronecker acima implica, por exemplo, que as rotações irracionais são minimais (pois o teorema implica que a órbita do elemento neutro de uma rotação irracional é densa).

3.1.2 Teorema de Hardy e Littlewood

Usando o teorema 2.10, será provado o teorema de Hardy e Littlewood e um teorema que generaliza ele. O teorema 3.7 de Furstenberg poderia ser provado antes do teorema de Hardy e Littlewood e, então, tirar esse teorema como corolário. O teorema de Hardy e Littlewood será demonstrado primeiro porque ele possui uma demonstração dinâmica mais simples.

Teorema 3.4 (Hardy e Littlewood) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}$ tais que $|k^2\alpha - q| < \varepsilon$.*

Prova: Seja $(\mathbb{T}, T)$ o sistema dinâmico de Kronecker, onde $T\overline{x} = \overline{x} + \overline{\alpha}$. Faz-se o produto cruzado de $(\mathbb{T}, T)$ via $\mathbb{T}$ pela aplicação $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $\phi(x) = 2x + \overline{\alpha}$. Obtém-se, assim, o sistema dinâmico $(\mathbb{T}^2, S)$, onde

$$S(x, y) = (\overline{x} + \overline{\alpha}, 2\overline{x} + \overline{\alpha} + \overline{y}).$$

Todo ponto no sistema dinâmico de Kronecker $(\mathbb{T}, T)$ é recorrente (por ser uma translação), logo, pelo teorema 2.10, todo ponto em $(\mathbb{T}^2, S)$ é recorrente. Em particular, $(0, 0)$ é recorrente.

Provemos que $S^n(0, 0) = (n\overline{\alpha}, n^2\overline{\alpha})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Com efeito, para $n = 1$, a afirmação é verdadeira. Supõe-se, por indução, que é verdadeira para m.

Isso implica que

$$\begin{aligned} S^{m+1}(\overline{0},\overline{0}) &= S(S^m(\overline{0},\overline{0})) \\ &= S(m\overline{\alpha}, m^2\overline{\alpha}) \\ &= ((m+1)\overline{\alpha}, 2m\overline{\alpha}+\overline{\alpha}+m^2\overline{\alpha}) \\ &= ((m+1)\overline{\alpha}, (m^2+2m+1)\overline{\alpha}) \\ &= ((m+1)\overline{\alpha}, (m+1)^2\overline{\alpha}). \end{aligned}$$

Ou seja, implica que a afirmação é verdadeira para $m+1$. E, portanto, está completa a prova por indução de que $S^n(\overline{0},\overline{0}) = (n\overline{\alpha}, n^2\overline{\alpha})$.

Como $(\overline{0},\overline{0})$ é recorrente, dado $\varepsilon > 0$, segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d_M((\overline{0},\overline{0}),(k\overline{\alpha},k^2\overline{\alpha})) < \varepsilon$. Isso, em particular, implica que

$$d(0, k^2\overline{\alpha}) < \varepsilon.$$

E isso quer dizer que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $|k^2\alpha - q| < \varepsilon$. $\square$

Antes de provar o teorema 3.7 de Furstenberg, será definido um sistema dinâmico denominado "Sistema de Furstenberg". Será provado que esse sistema é recorrente (todos os pontos são recorrentes).

Definição 3.4 *Para cada $d \in \mathbb{N}$, seja $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ o toro d-dimensional. Um sistema de Furstenberg é um sistema $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$, onde*

$$F_d(x_0, x_1, \ldots, x_d) = (x_0, x_1 + x_0, \ldots, x_d + x_{d-1}).$$

É interessante observar que o sistema de Furstenberg $(\mathbb{T}^2, F_1)$, ilustrado na figura 3.2, é tal que, dado $(\overline{z_0}, \overline{z_1}) \in \mathbb{T}^2$,

$$\begin{aligned} F_1^n(\overline{z_0}, \overline{z_1}) &= (\overline{z_0}, \overline{nz_0} + z_1) \\ &= (z_0, R_{z_0}^n z_1), \end{aligned}$$

ou seja, identidade na primeira coordenada e rotação na segunda coordenada.

Será provado que todo sistema dinâmico de Furstenberg é recorrente. Note que isso é fácil de verificar para o caso do sistema dinâmico $(\mathbb{T}^1, F_0)$, pois F_0 é a aplicação identidade em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$. Além disso, pela observação do

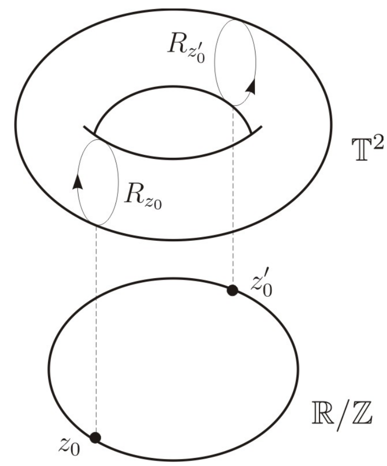

Figura 3.2: Sistema de Furstenberg para $d = 1$.

parágrafo anterior, é fácil verficar que a afirmação é verdadeira para $(\mathbb{T}^2, F_1)$ também.

A idéia da demonstração do caso geral é fazer indução sobre d. E, para completar esse argumento de indução, será usado o fato de que $(\mathbb{T}^d, F_{d-1})$ é um produto cruzado de $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ via o grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$. Apenas para tornar a demonstração da proposição 3.6 mais concisa, será provado isso no lema abaixo.

Lema 3.5 *Sejam $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ e $(\mathbb{T}^d, F_{d-1})$ sistemas dinâmicos de Furstenberg, onde $d \in \mathbb{N}$ qualquer. Segue que $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ é um produto cruzado de $(\mathbb{T}^d, F_{d-1})$ via $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Prova: Para provar o lema, basta verificar que $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ é o produto cruzado de $(\mathbb{T}^d, F_{d-1})$ via $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pela aplicação contínua $\phi : \mathbb{T}^d \to S^1$, onde $\phi(\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_{d-1}}) = \overline{z_{d-1}}$. De fato,

$$\begin{aligned} F_d(\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_d}) &= (\overline{z_0}, \overline{z_0} + \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_{d-1}} + \overline{z_d}) \\ &= (F_{d-1}(\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_{d-1}}), \overline{z_{d-1}} + \overline{z_d}) \\ &= (F_{d-1}(\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_{d-1}}), \phi(\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_{d-1}}) + \overline{z_d}) \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 3.6 *Todo sistema dinâmico de Fursteberg* $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ *é recorrente (ou seja, todos os pontos de um sistema de Furstenberg ão recorrentes).*

Prova: Como foi observado anteriormente, o sistema dinâmico $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ é recorrente, quando $d = 0$ (pois, nesse caso, a aplicação F_0 é a aplicação identidade em S^1). Prova-se, então, por indução, que a afirmação é verdadeira para qualquer d natural.

A hipótese de indução é que o sistema de Furstenberg $(\mathbb{T}^d, F_{d-1})$ é recorrente. Como $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ é um produto cruzado de $(\mathbb{T}^d, F_{d-1})$ via $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, segue, pelo teorema 2.10, que $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ é recorrente. E, portanto, isso completa a prova por indução da proposição. $\square$

Com esse resultado que diz que todo sistema de Furstenberg é recorrente, estamos prontos para provar o mais forte resultado de Aproximação Diofantina que será apresentado neste texto: o teorema 0.4 de Furstenberg. Seguem o enunciado a demonstração desse teorema.

Teorema 3.7 (Teorema de Furstenberg) *Seja* $p(x)$ *um polinômio com coeficientes reais tal que* $p(0) = 0$. *Então,* $\forall \varepsilon > 0$, *existem* $k \in \mathbb{N}$ *e* $q \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$|p(k) - q| < \varepsilon.$$

Prova: Com efeito, seja $p(x)$ um polinômio de grau d satisfazendo a hipótese. Define-se, então, uma lista de $d+1$ polinômios da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_d(x) &:= p(x) \\ p_{d-1}(x) &:= p_d(x+1) - p_d(x) \\ &\vdots \\ p_1(x) &:= p_2(x+1) - p_2(x) \\ p_0(x) &:= p_1(x+1) - p_1(x). \end{aligned}$$

É fácil verificar que o polinômio $p_k(x)$ dessa lista tem grau k, para qualquer $k = 0, \ldots, d$. Em particular, p_0 é constante (grau 0).

O toro $\mathbb{T}^{d+1}$ é munido da métrica do máximo em relação à métrica do menor arco em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Toma-se, então, o sistema dinâmico de Furstenberg $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$. Verifica-se que

$$F_d^n(\overline{p_0(0)}, \ldots, \overline{p_d(0)}) = (\overline{p_0(n)}, \ldots, \overline{p_d(n)}),$$

afinal, tem-se a seguinte relação de recorrência

$$\begin{aligned} F_d(\overline{p_0(n)}, \ldots, \overline{p_d(n)}) &= (\overline{p_0(n)}, \overline{p_0(n)} + \overline{p_1(n)}, \ldots, \overline{p_{d-1}(n)} + \overline{p_d(n)}) \\ &= (\overline{p_0(n+1)}, \overline{p_1(n+1)}, \ldots, \overline{p_d(n+1)}). \end{aligned}$$

Pelo resultado 3.6, tem-se que $(\overline{p_0(0)}, \ldots, \overline{p_d(0)})$ é recorrente no sistema dinâmico $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$. E isso implica, em particular, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a distância entre $(\overline{p_0(0)}, \ldots, \overline{p_d(0)})$ e $F_d^n(\overline{p_0(0)}, \ldots, \overline{p_d(0)})$ é menor que ε. Mas, pela métrica do máximo, isso implica que

$$\text{mín}_{m\in\mathbb{Z}} |p_d(n) - p_d(0) - m| < \varepsilon.$$

E, como $p_d(0) = 0$ e $p_d(n) = p(n)$, isso implica que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|p(n) - m| < \varepsilon$. □

O teorema precedente é mais forte que o teorema de Hardy e Littlewood (teorema 3.4), pois aquele se trata apenas de um caso particular: quando o polinômio tem grau 2. Note, portanto, que o teorema de Hardy pode ser colocado como corolário do teorema precedente. Existe um outro corolário desse teorema. Na verdade, é corolário da demonstração do teorema e está enunciado abaixo.

Corolário 3.7.1 *Sejam $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ polinômios tais que $p_j(0) = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existem inteiros $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$|p_j(n) - m_j| < \varepsilon, \forall j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Prova: Com efeito, basta tomar o polinômio

$$p(x) = (p_1(x), \ldots, p_k(x)).$$

Em vez de tomar o sistema dinâmico $(\mathbb{T}^{d+1}, F_d)$ (onde d é o grau do polinômio), toma-se o sistema dinâmico $((\mathbb{T}^k)^d, F_d)$ (onde d é o grau do polinômio de maior grau entre $p_1(x), \ldots, p_k(x)$). Por uma argumentação análoga, todos os pontos desse sistema dinâmico são recorrentes. Disso e do fato de que $F_d^n(p(0)) = p(n)$ segue a tese do corolário. □

3.2 Sistemas Dinâmicos Simbólicos

Nesta seção, trataremos de dinâmica simbólica. Será com sistemas dinâmicos simbólicos que demonstraremos o teorema de Van Der Waerden. Antes de continuarmos, falaremos um pouco sobre o que é um sistema dinâmico simbólico e como é seu espaço de fase.

Um alfabeto de $k \in \mathbb{N}$ letras é um conjunto de cardinalidade k. Seja Λ um alfabeto de k letras munido da topologia discreta. Por Λ ser evidentemente compacto, segue, pelo teorema de Tychonoff, que $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$, munido da topologia produto, é um compacto. Um ponto $x \in \Omega$ pode ser escrito como uma função

$$\begin{aligned} x: \ \mathbb{Z} &\to \Lambda \\ k &\mapsto x_k \end{aligned}$$

Para cada "coordenada" $j \in \mathbb{Z}$, tem-se a aplicação projeção $\pi_j : \Lambda^{\mathbb{Z}} \to \Lambda$, onde $\pi_j(x) = x_j$. A topologia produto torna todas essas aplicações contínuas, além disso ela é menor topologia que satisfaz isso.

A topologia produto num espaço topológico $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$ é caracterizada pelo fato de que " uma aplicação $f : M \to \Omega$ é contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas $(\pi_i \circ f) : M \to \Lambda_i$ é contínua". De fato, Ω é metrizável, afinal é produto enumerável de espaços metrizáveis.

Lema 3.8 *Seja $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$. Se $x \neq y$ em Ω, define-se*

$$d(x, y) = \frac{1}{1 + min\{|k| : x_k \neq y_k\}},$$

e $d(x, x) = 0$. Isso é uma métrica que induz a topologia produto em Ω.

Prova: O fato de d ser uma métrica é de fácil verificação.

Seja ρ_i a métrica zero-um em Λ_i, ou seja, $\rho_i(x, x) = 0$ e $\rho_i(x, y) = 1$, se $x \neq y$.

Com efeito, supõe-se $f : M \to \Omega$ contínua. Dada uma projeção $\pi_i : \Omega \to \Lambda_i$ qualquer, tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} d(x, y) < \delta \implies & d(f(x), f(y)) < \frac{1}{2|i|} \\ \implies & \text{mín}\{|k| : f(x)_k \neq f(y)_k\} > |i| \\ \implies & \rho_i(f(x)_i, f(y)_i) = 0 < \varepsilon \end{aligned}$$

Ou seja, foi provado que $(\pi_i \circ f)$ é contínua.

Reciprocamente, se $(\pi_i \circ f)$ é contínua para todo $i \in \mathbb{Z}$, segue que, dado $\varepsilon = 1/n_o > 0$, existem $\delta_0, \delta_1, \delta_{-1}, \ldots, \delta_{n_o}, \delta_{-n_o} > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
d(x,y) < \delta_0 &\implies \pi_0(f(x)) = \pi_0(f(y)) \\
d(x,y) < \delta_1 &\implies \pi_1(f(x)) = \pi_1(f(y)) \\
d(x,y) < \delta_{-1} &\implies \pi_{-1}(f(x)) = \pi_{-1}(f(y)) \\
&. \\
&. \\
&. \\
d(x,y) < \delta_{n_o} &\implies \pi_{n_o}(f(x)) = \pi_{n_o}(f(y)) \\
d(x,y) < \delta_{-n_o} &\implies \pi_{-n_o}(f(x)) = \pi_{-n_o}(f(y))
\end{aligned}$$

Logo $d(x,y) < \text{mín}\{\delta_{-n_0}, \delta_{n_0}, \delta_{-n_0+1}, \delta_{n_0-1}, \ldots, \delta_0\}$ implica

$$d(f(x), f(y)) < \frac{1}{1+|n_o|} < 1/n_o = \varepsilon.$$

Isso completa a prova da recíproca. □

Note que, com a métrica definida no lema 3.8, $d(x,y) \leq 1$, $\forall x, y \in \Omega$.

Definição 3.5 *Seja $T : \Omega \to \Omega$, $Tx = y$, onde $y_k = x_{k+1}$. A aplicação T é chamada de função-deslocamento no alfabeto Λ, ou "shift" no alfabeto Λ. T é um homeomorfismo. Chamamos o sistema dinâmico (Ω, T) de deslocamento (de dois lados) em k símbolos (e ele é um sistema dinâmico simbólico).*

Prova: Provemos que T é um homeomorfismo.

Dado $i \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\pi_i \circ T = \pi_{i+1}$ é, evidentemente, contínua. Portanto ficou provado que T é contínua. Analogamente, dado $i \in \mathbb{Z}$, temos que $\pi_i \circ T^{-1} = \pi_{i-1}$ é contínua. Portanto T é homeomorfismo.

□

3.2.1 Teorema de Van der Waerden

Para provar o teorema de Van der Waerden 0.5, o primeiro passo é fazer uma "tradução" desses problemas de coloração para o contexto de sistemas dinâmicos. O lema 3.9 é responsável por essa tradução.

Aqui, será usado freqüêntemente as terminologias estabelecidas na página 6. O sistema dinâmico que será tratado aqui é o sistema dinâmico simbólico estabelecido no início desta seção. O principal resultado ustilizado nesta subseção é aquele provado na seção de Recorrência Múltipla do capítulo Recorrências[3].

Lema 3.9 (Furstenberg) *Dado um sistema dinâmico (X,T) qualquer. Para todo $x \in X$, todo $\varepsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\left\{T^m x, T^{m+n}x, \ldots, T^{m+nk}x\right\}$$

tem diamêtro menor que ε.

Prova: Toma-se um sistema dinâmico (X,T) qualquer. Dados $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, toma-se $Y = \overline{\mathbb{Z} \cdot x}$. Por Y ser o fecho de um T-invariante, segue que Y é invariante.

Define-se $T_i := T^i$. Logo $\{T_1, \ldots, T_k\}$ é uma família de homeomorfismos comutativos agindo em Y. Logo, pelo teorema 2.13, segue que existem $y \in Y$ e $n_j \to \infty$ tais que

$$T_1^{n_j} y \to y, \ldots, T_k^{n_j} y \to y.$$

Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_1^n y, \ldots, T_k^n y \in B(y; \varepsilon/8)$.

Pela continuidade uniforme de $T_1^n, T_2^n, \ldots, T_k^n$, segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$d(a,b) < \delta \Longrightarrow \text{mín}\left\{d(T_1^n a, T_1^n b), \ldots, d(T_k^n a, T_k^n b)\right\} < \varepsilon/8.$$

Por $y \in Y = \overline{\mathbb{Z} \cdot x}$, segue que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d(T^m x, y) <$ mín $\{\delta, \varepsilon/8\}$. Logo

$$d(T^m x, y), d(T_1^n y, T_1^n(T^m x)), \ldots, d(T_k^n y, T_k^n(T^m x)) < \varepsilon/8.$$

Mas isso quer dizer que

$$d(y, T^m x), d(T^n y, T^{m+n}x), d(T^{2n}y, T^{m+2n}x), \ldots, d(T^{kn}y, T^{m+kn}x) < \varepsilon/8.$$

Tem-se que, para qualquer $q \in \{0, 1, \ldots, k\}$, vale

$$d(y, T^{m+nq}x) \leq d(T^{m+nq}x, T^{nq}y) + d(T^{nq}y, y) < \varepsilon/8 + \varepsilon/8 = \varepsilon/4.$$

[3] Ver seção 2.4

Portanto $T^m x, \ldots, T^{m+nk} x \in B[y; \varepsilon/4]$. Ou seja, o diâmetro do conjunto $\left\{T^m x, \ldots, T^{m+nk} x\right\}$ é menor que ε.

□

Segue, abaixo, o enunciado e a demonstração do teorema de Van de Waerden 0.5.

Teorema 3.10 (Van der Waerden) *Se $\mathbb{Z} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ é uma partição finita, então, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, C_j contém uma progressão aritmética finita de tamanho arbitrário. Ou seja, toda coloração finita de $\mathbb{Z}$ contém uma P.A. de tamanho arbitrário finito monocromática.*

Prova: Dada uma coloração

$$\mathbb{Z} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$$

de r cores, define-se o sistema dinâmico (Ω, T) de deslocamento[4], onde $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}} = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Z}}$. Mune-se Ω da métrica d definida em 3.5. Note que essa métrica tem a propriedade de

$$d(x, y) < 1 \Longleftrightarrow x_0 = y_0.$$

Toma-se o ponto $x \in \Omega$ tal que $x_t = i$, se $t \in C_i$. Pelo lema 3.9, dado um tamanho $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\left\{T^m x, T^{m+n} x, \ldots, T^{m+nk} x\right\}$ tem diâmetro menor que 1. Pela métrica, segue que

$$(T^m x)_0 = \cdots = (T^{m+nk} x)_0.$$

Ou seja, $x_m = \cdots = x_{m+nk}$. Isso quer dizer que

$$\{m, \ldots, m + nk\} \subset C_j,$$

onde $j := x_m \in \{1, \ldots, r\}$. □

Observação: Um fato interessante é que o lema 3.9 é uma versão dinâmica do teorema de Van der Waerden: ele é equivalente ao teorema de Van der Waerden. Para provar o lema 3.9 usando o teorema de Van der Waerden,

[4]Definido em 3.5.

basta tomar uma partição finita de $X = \bigcup_{i=1}^{r} F_i$ por conjuntos fechados de diâmetro menor que ε[5]. Segue que $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$, onde

$$C_i = \{t \in \mathbb{Z} : t \cdot x \in F_i\},$$

é uma partição de $\mathbb{Z}$. Logo, pelo teorema de Van der Waerden, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\{m, m+n, \ldots, m+nk\}$ está inteiramente contido em algum C_j. Ou seja,

$$\left\{T^m x, \ldots, T^{m+nk} x\right\} \subset F_j,$$

donde segue a tese do lema 3.9.

[5]Essa partição existe por X ser compacto

Apêndice A

Transitividade Topológica

Nessa seção, será discutido uma noção ligada às noções de conjuntos minimais e de recorrência: a de transitividade topológica.

Definição A.1 (Transitividade topológica) *Seja $(X, \mathbb{Z})$ um sistema dinâmico. $(X, \mathbb{Z})$ é denominado topologicamente transitivo se existe algum $x \in X$ tal que*

$$\overline{\mathbb{Z} \cdot x} = X.$$

Proposição A.1 *Seja $(X, \mathbb{Z})$ um sistema dinâmico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$(X, \mathbb{Z})$ é topologicamente transitivo;*
2. *Se $U \subset X$ é um aberto não-vazio invariante, então U é denso em X;*
3. *Se $U, V \subset X$ são abertos não-vazios, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$n \cdot U \cap V \neq \emptyset.$$

Prova: $1 \Rightarrow 2$: Assumindo 1, toma-se $x \in X$ tal que $\overline{\mathbb{Z} \cdot x} = X$. Logo, dado um aberto $U \subset X$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot x \in U$. Como U é invariante, segue que

$$\mathbb{Z} \cdot x = \mathbb{Z} \cdot (n \cdot x) \subset U.$$

Portanto $\overline{U} \supset \overline{\mathbb{Z} \cdot x} = X$. Isso completa a prova de que $\overline{U} = X$ e, portanto, completa a prova de que 1 implica 2.

$2 \Rightarrow 3$: Sejam U, V abertos não-vazios de X. Segue que $\mathbb{Z} \cdot U$ é um aberto invariante não-vazio de X. Logo, pela hipótese, $\mathbb{Z} \cdot U$ é denso. Portanto

$$\mathbb{Z} \cdot U \cap V \neq \emptyset.$$

Ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot U \cap V \neq \emptyset$.

$3 \Rightarrow 1$: Um espaço métrico compacto satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, ou seja, possui uma base enumerável. Toma-se uma base enumerável $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cdot V_j$ é aberto e, então, (pela hipótese) tem interseção não-vazia com todo aberto de X. Ou seja, $\mathbb{Z} \cdot V_j$ é denso em X. Portanto

$$I = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z} \cdot V_j$$

é uma interseção enumerável de abertos densos. Pelo teorema de Baire, isso é não vazio. Toma-se $x \in I$. Tem-se que, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot x \in V_j$. Portanto a órbita de x tem interseção não vazia com todo aberto básico, ou seja, é densa em X. Isso completa a prova de que $(X, \mathbb{Z})$ é topologicamente transitivo. $\square$

A proposição a segur mostra uma condição suficiente para que um sistema dinâmico transitivo seja minimal.

Proposição A.2 *Seja (X, T) um sistema dinâmico transitivo (onde X possui uma métrica d). Se existe uma métrica equivalente a d tal que T é uma isometria, então (X, T) é minimal.*

Prova: Com efeito, sejam (X, T) um sistema dinâmico transitivo (com a métrica d) e ϕ uma métrica equivalente à d tal que T é uma isometria.

Toma-se $x \in X$ tal que $\overline{\mathbb{Z} \cdot x} = X$. Dado $y \in X$, provemos que sua órbita é densa em X. Dados $z \in X$ e $\varepsilon > 0$, segue que existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $d(m \cdot x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(n \cdot x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto

$$\begin{aligned} d(z, (n-m) \cdot y) &\leq d(z, n \cdot x) + d(n \cdot x, (n-m) \cdot y) \\ &= d(z, n \cdot x) + d(m \cdot x, y) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Isso completa a prova da proposição. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems.* Colloquium Publications IX, America Mathematical Society. Providence, 1927.

[2] Ellis, R. *Lectures on Topological Dynamics.* New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[3] Furstenberg, H. *Disjointness in ergodic theory, minimal, sets and problem diophantine approximation.* Math Systems Theory, 1967.

[4] Furstenberg, H. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1981.

[5] Hardy, G.H.; Littlewood, J.E. *The fractional part of* $n^k\theta$. Acta Math, 1914.

[6] Kra, B. A Generalization of Furstenberg's Diophantine result. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127, 7, 1951-1956, 1999.

[7] Kronecker, L. *Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coeficienten.* J. Reine Angew. Math, 1857.

[8] Lucatelli Nunes, F. *Elementos de Topologia para Sistemas Dinâmicos.*

[9] Lucatelli Nunes, F. *Relatório da Iniciação Científica 2009-2010.*

[10] Tao, T.; Vu, Van H. *Additive Combinatorics.* Cambridge: Cambridge Studies in advanced Mathematics, 2006.

[11] Waerden, B.L. Van der. *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw. Arch. Wisk., 1927.